Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Людковский, Квазиинвариантные меры на неархимедовых полугруппах
петель, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 3, 203–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm51>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:31:16

КВАЗИИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ НА НЕАРХИМЕДОВЫХ ПОЛУГРУППАХ ПЕТЕЛЬ

С. В. Лютковский

Далее $\mathbb{K}$ обозначает конечное алгебраическое расширение поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Пусть $\overline{M}$ и N обозначают сепарабельные метризуемые многообразия, смоделированные на неархимедовых банаховых пространствах (БП) X и Y над полем $\mathbb{K}$. Предположим, что они имеют дизъюнктные аналитические атласы вида $\text{At}(\overline{M}) = \{(U_j, \phi_j) : j \in \Upsilon\}$ и $\text{At}(N) = \{(P_j, \psi_j) : j \in \Lambda\}$ и существуют вложения $\overline{M}$ в X и N в Y в качестве открыто-замкнутых (ОЗ) подмножеств, где U_j, C_j, P_j и V_j ОЗ в $\overline{M}, X, N$ и Y соответственно, $\phi_j: U_j \rightarrow C_j, \psi_j: P_j \rightarrow V_j$ являются гомеоморфизмами, задающими карты, C_j ограничены в $X, \Lambda \cup \Upsilon \subset \mathbb{N}$. БП X (и Y) изоморфно пространству $c_0(\alpha, \mathbb{K})$ (и $c_0(\beta, \mathbb{K})$) сходящихся к нулю последовательностей $x = (x^j \in \mathbb{K} : j \in \alpha), \|x\| := \max_j |x^j|_{\mathbb{K}}$ при $\alpha = \mathbb{N}$ и $X = \mathbb{K}^m$ при $\alpha = m \in \mathbb{N}$, где α и $\beta \geq 1$ – ординалы. Пусть $b \in \mathbb{Q}$ и $0 < b < 1$, тогда $j(b, z) := p^{b \times \text{ord}_p(z)} \in \mathbb{C}_p \forall z \in \mathbb{K}$, где $\mathbb{C}_p$ – поле комплексных чисел с неархимедовым нормированием, такое, что $\mathbb{C}_p \supset K, p^{-\text{ord}_p(z)} := |z|_{\mathbb{K}}$. Тогда, как и в [3], [4], через $C_0^\theta(t, s; \overline{M} \rightarrow N)$ обозначим равномерное пространство отображений $f: \overline{M} \rightarrow N$ с $f_{l,j} := f_{l,j} - \theta_{l,j}, f_{l,j} := \psi_l \circ f \circ \phi_j^{-1}$ на $\phi_j(f^{-1}(P_l) \cap U_j) \neq \emptyset$ по базису $q_i \overline{Q}_m(x_n)$ с коэффициентами $a(m, \overline{f}^i) \in \mathbb{K}, \overline{f}_{l,j} = \sum_{(n,i \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0^d)} a(m, \overline{f}_{l,j}^i) \overline{Q}_m(x_n) q_i, \lim_{i+|m|+\text{Ord}(m) \rightarrow \infty} |a(m, \overline{f}_{l,j}^i)| J(t, s, m) = 0$, где для пространств C без индекса 0 последнее условие не накладывается, $\{e_j : j \in \Upsilon\}$ и $\{q_i : i \in \Lambda\}$ – стандартные ортонормированные в неархимедовом смысле базисы (ОНБ) в X и $Y, \overline{Q}_m(x_n)$ – базис полиномов Амиса на ОЗ подмножестве $V_{j,n} := V_j \cap \mathbb{K}^n$ в $B(\mathbb{K}^n, z, r) := \{x \in \mathbb{K}^n : \|x - z\| \leq r\}, z \in \mathbb{K}^n, r > 0, x_n := (x^1, \dots, x^n), \text{Ord}(m) := \max_{m_i \neq 0} i = n \in \mathbb{N}_0, Q_0(x) := 1, m = \{m_i : i \in \Upsilon\}$, дробная часть числа $\{t\} = b, 0 \leq t \in \mathbb{Q}, s \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \theta: \overline{M} \rightarrow N$ – фиксированное бесконечно дифференцируемое отображение. В частности, $C_0^\theta(t, s; B(X, 0, r) \rightarrow Y)$ является БП с $\|f\|_{t,s} = \max_{i,n,m} |a(m, f^i)| J(t, s, m)$, где $J(t, s, m) := \sup_{(x \in V_{j,n}^d, v = v' + (1, \dots, 1)s', |v'| \leq t, 0 \leq s' \leq s)} |(\Phi^v \overline{Q}_m)(x)|, \Phi^v$ – разделенные разности, $|v| = v^1 + \dots + v^n, \theta(B(X, 0, r)) = \{0\}, d = [|v|] + 1 + \text{sign}\{v\}, [c]$ – целая часть числа $c \in \mathbb{R}$. Тогда при $0 < b < 1, b \in \mathbb{R}, \{t\} = b$ определим $C_0^\theta(t, s; B(X, 0, r) \rightarrow Y)$ как пополнение пространства бесконечно дифференцируемых функций по норме $\|f\|_{t,s} := \sup_{0 \leq w \leq t, w \in \mathbb{Q}} \|f\|_{w,s}$, для $\dim_{\mathbb{K}} M = \infty$ пусть $s = 0$. Равномерность на $C_0^\theta(t, s; \overline{M} \rightarrow N)$ задается с помощью строгого индуктивного предела пространств $C_0^\theta(t, s; U^j \rightarrow N) = H_j$ с вложениями $\Psi_l^j: H_j \hookrightarrow H_l \forall j \leq l \in \Upsilon$, где $U^j = \bigcup_{i=1}^j U_i$.

Пусть $s_0 = 0 \in \overline{M}$ и $y_0 = 0 \in N, G(t, s) := \{g \in C_0^\theta(t, s; \overline{M} \rightarrow \overline{M})\} \cap \text{Hom}(\overline{M})$, где $\theta(x) = \text{id}(x) := x \forall x \in \overline{M} := \overline{M} \setminus \{s_0\}, 0 \leq t \in \mathbb{Q}$. В пространстве $C_0^\theta(t, s; (M, s_0) \rightarrow (N, y_0)) := \{f \in C_0^\theta(t, s; \overline{M} \rightarrow N) \mid (\overline{\Phi}^j f)(s_0) = 0 \text{ при } |j'| = 0, 1, \dots, t; j = j' + s'(1, \dots, 1); 0 \leq s' \leq s\}$ рассмотрим отношение эквивалентности $f K_{t,s} g$, которое означает, что $\exists \eta_n \in G(t, s), \eta_n(s_0) = s_0, f_n$ и $g_n \in C_0^\theta(t, s; (M, s_0) \rightarrow (N, y_0))$, такие, что $f_n(\eta_n(x)) = g_n(x)$ для всех $x \in M, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$. В $C_0^\theta(t, s; (M, s_0) \rightarrow (N, y_0))$ введем композицию $f \circ g := h$ с $h(x) = g(x_1)$ при $x \in M_1$ и $h(x) = f(x_2)$ при $x \in M_2$, где $x = (x_1, x_2) \in M_1 \cup M_2 \subset M \times M, M_1 := M \times \{s_0\}, M_2 = \{s_0\} \times M, \chi: M_1 \cup M_2 \rightarrow M$ – соответствующий $C(\infty)$ -диффеоморфизм, $h(\chi(x)) \in C_0^\theta(t, s; (M, s_0) \rightarrow (N, y_0))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Факторпространство $C_0^\theta(t, s; (M, s_0) \rightarrow (N, y_0))/K_{t,s}$ назовем *пространством петель* и обозначим $\Omega_{t,s}(M, N)$, где $c^0(M) = \{y_0\}$.

ЛЕММА 1. Пространство $\Omega_{t,s}(M, N)$ является хаусдорфовым, сепарабельным, ультраравномерным и полным со структурой топологического абелевого моноида (по-

лугруппы с единичным элементом); $\Omega_{t,s}(M, N)$ плотно в себе и имеет мощность $c = \text{card}(\mathbb{R})$.

ЛЕММА 2. Для любых $1 \leq t \in \mathbb{Q}$ и $s \in \mathbb{N}_0$ пространство $\Omega_{t,s}(M, N) =: G$ является аналитическим многообразием и определено отображение $\bar{E}: \bar{V}_\eta \rightarrow W_\eta$, являющееся C^∞ -диффеоморфизмом, $\bar{E}(V) = \overline{\text{exp}}_{\eta(x)} \circ V_\eta$, где $\bar{V}_\eta$ – ОЗ окрестность нулевого сечения касательного расслоения $T_\eta G \subset TG$, $V_\eta \in \bar{V}_\eta$, $G \supset W_\eta \ni \eta$, $\overline{\text{exp}}: \tilde{T}N \rightarrow N$, $\tilde{T}N$ – окрестность N в TN , $\overline{\text{exp}}_y(z) := z$ для любых $z \in B(Y, y, r) \subset TyN$ для соответствующих $0 < r < \infty$ и $y \in N \subset Y$, $TN = \bigcup_{y \in N} TyN \approx N \times Y$.

Доказательство вытекает из [4 (180), §3.4].

ТЕОРЕМА. Полугруппа $\Omega_{t,s}(M, N) =: G$ (см. лемму 2) имеет квазиинвариантную меру (КИМ) со значениями в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_j$ для простых j с $j \neq p$.

Наметим путь доказательства. При $t \geq 1$ пространство $A^k G$ дифференциальных k -форм многообразия G изоморфно $\Omega_{t,s}(M, A^k N) \times A_{y_0}^k N$, где $\theta(M) = \{y_0 \times 0\}$ (см. леммы 1, 2), $k \in \mathbb{N}$, $k \leq \alpha$. Для $f \in C_0^0(t, s; M \rightarrow N)$ и $\omega \in \Omega_{t,s}(M, A^k N)$ определено ограничение $f^* \omega \in C_0^\theta(t-1, s; M \rightarrow A^k M)$ [1]. Для ограниченного M в X , например, U^j в качестве M , антидифференцирование $P_a(l)$ на $C_0^\theta(t-1, s; M_a \rightarrow Y)$ [3] индуцирует с учетом отношения эквивалентности $K_{t,s}$ непрерывный аддитивный оператор $(\bar{P}_a(l)\bar{f})^* \omega$ из $G_a \times \Omega_{t,s}(M, A^k N)$ в $\Omega_{t-1,s+1}(M_a, A^k M) \times A_{s_0}^k M \subset \Omega_{t,s}(M_a, A^k M) \times A_{s_0}^k M$, где $f \in \bar{f} \in G_a$, $M_a = M \cap \mathbb{K}^a$, $G_a := \Omega_{t,s}(M_a, N) \hookrightarrow G$, $a \in \mathbb{N}$, $l = [t-1]$, $s_0 \in M_a$. Это отображение инъективно при $\alpha \geq \beta$, $H_a := A_{c_0}^k \Omega_{t-1,s+1}(M_a, M)$. При $\alpha < \beta =: \gamma$ рассмотрим пространство $Z := c_0(\{H_{a,n} : a \in \mathbb{N}, n \in \gamma\}) := \{z = (z^{a,n} \in H_{a,n}) : \|z\| = \sup_{a,n} \|z^{a,n}\|_{H_{a,n}}; \lim_{a,n} \|z^{a,n}\|_{H_{a,n}} = 0\}$ при $\gamma = \mathbb{N}$, пространство $Z := \bigotimes_{a,n} H_{a,n}$ при α и $\gamma \in \mathbb{N}$, а при $\alpha > \beta$ пусть $Z := c_0(H_a : a)$, где $H_a = H_{a,n}$. Существуют $w_{i,j} \in \Omega_\infty(M, A^k N)$, $\xi_{a,n} \in \mathbb{K}$ и $h_{a,n} \in H_{a,n}$, такие, что $A(v) := \sum_{a,i,n} \xi_{a,n} (\bar{P}_a(l)(\bar{f}|M_a))^* w_{i,n} h_{a,n}$ – инъективный аддитивный оператор из $\bar{V}_\zeta$ в Z , $\|A\|$ и $\|A^{-1}\| \in [1/p, 1]$, где $\bar{E}(v) = f$ (см. леммы 1, 2). Пусть $G' = C_{0,\{k\}}^0(t, s; M \rightarrow N)/K_{t,s}$ – плотная подполугруппа в G с $C_{0,\{k\}}^0(t, s; M \rightarrow Y) := \{\phi \in C_0^0(t, s; M \rightarrow Y) | \lim_{k(i,m) \rightarrow \infty} |a(m, \phi^i)| J(t, s; m) p^{k(i,m)} = 0; \|\phi\| = \sup_{i,m} |a(m, \phi^i)| J(t, s; m) p^{k(i,m)}\}$, где $k(i, m) = c \times (i + |m| + \text{Ord}(m))$, $c = \text{const} > 1$. Тогда КИМ на банаховом подпространстве $\text{sp}_{\mathbb{K}} A(\bar{V})$ в Z с помощью оператора A индуцирует КИМ сначала на G для U^j , а с помощью индуктивного предела на G для $M = \bigcup_j U^j$, в силу [4 (210), теоремы 3.23 и 3.28].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бурбаки Н. Многообразия. М.: Мир, 1975. [2] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. [3] Лютковский С. В. // УМН. 1996. Т. 51. № 2. С. 169–170. [4] Лютковский С. В. Preprints IC/96/180, 181, 210, 215. Trieste: ICTP, 1996. [5] Van Rooij A. C. M. Non-Archimedean functional analysis. New York: Marcel Dekker, 1978.