Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Сорокин, Циклические графы и теорема Апери, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 3, 99–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:51:23

УДК 517.53

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ГРАФЫ И ТЕОРЕМА АПЕРИ

В. Н. Сорокин

Приводится обзор результатов о поведении аппроксимаций Эрмита–Паде для графов марковских функций, а также обзор интерполяционных задач, приводящих к результату Р. Апері об иррациональности значения дзета-функции Римана $\zeta(3)$. Представлен первый пример задачи Эрмита–Паде для циклического графа, также приводящего к теореме Апері. Получены явные формулы для решений – формулы Родрига и интегральные представления, исследована асимптотика аппроксимаций, найдены рекуррентные формулы.

Библиография: 51 название.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	100
1.1. Аппроксимации Эрмита–Паде	100
1.2. Системы Анжелеско и Никишина	101
1.3. Обзор результатов об арифметической природе значений дзета-функции	107
2. Что приближаем?	108
2.1. Циклический граф	108
2.2. Граф весовых функций	110
2.3. Связь циклического графа с числом $\zeta(3)$	111
3. Как приближаем?	112
3.1. Постановка задачи Эрмита–Паде для циклического графа	112
3.2. Анализ условий задачи в бесконечности	114
3.3. Анализ условий на весовые функции	114
3.4. Анализ условий задачи в точках ветвления	115
4. Формулы Родрига и интегральное представление	115
4.1. Интегральное представление решений (теорема 1)	115
4.2. Формула Родрига	116
4.3. Интегральное представление вспомогательной весовой функции	117
4.4. Совместные двухточечные аппроксимации Паде	119
4.5. Формула Родрига для двухточечных аппроксимаций Паде	120
4.6. Интегральное представление двухточечных аппроксимаций Паде	121
4.7. Доказательство теоремы 1	122
4.8. Возвратные многочлены Лежандра	122

5. Риманова поверхность и асимптотика	123
5.1. Риманова поверхность и мероморфная функция Φ , порожденные циклическим графом	123
5.2. Асимптотическое поведение аппроксимаций Эрмита–Паде	123
5.3. Многомерный метод перевала	124
5.4. Алгебраическое уравнение для критических точек	125
5.5. Исследование алгебраического уравнения	125
5.6. Поведение функции Φ в ее нулях, полюсах и точках ветвления	126
5.7. Задача равновесия логарифмического потенциала	127
6. Рекуррентные соотношения и теорема Апери	128
6.1. Общая схема оценки меры иррациональности	128
6.2. Теорема Апери	130
6.3. Рекуррентное соотношение для циклического графа	131
Список литературы	132

1. Введение

1.1. Аппроксимации Эрмита–Паде. Отправными точками для написания настоящей работы послужили следующие два направления исследований, активно проводившихся последние 20 лет в анализе и теории чисел. Во-первых, это – теория аппроксимаций Эрмита–Паде, во-вторых, – теорема Р. Апери об иррациональности значения дзета-функции Римана $\zeta(3)$. Фундаментальные результаты в первой из этих областей принадлежат Андрею Александровичу Гончару. Предложенный им метод равновесия в теории логарифмического потенциала (см. [1]–[4]) лег в основу изучения сходимости рациональных аппроксимаций. Также им была предложена концепция графов для описания классов единственности [5]. Применению этого понятия в теории чисел и будет посвящена наша работа.

В теории аппроксимаций Эрмита–Паде хорошо известны следующие две конструкции. Пусть дан набор формальных степенных рядов

$$f_1, \dots, f_r$$

вида

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{j,k}}{z^{k+1}},$$

где $f_{j,k}$ – произвольные комплексные числа. Зафиксируем мультииндекс

$$n = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_+^r.$$

(I) Требуется найти многочлен $Q_n(z)$ такой, что

- 1) $Q_n \not\equiv 0$,
- 2) $\deg Q_n \leq |n| := n_1 + \dots + n_r$,
- 3) для некоторых многочленов $P_{n,1}, \dots, P_{n,r}$ выполняются следующие интерполяционные условия:

$$(Q_n f_j - P_{n,j})(z) = O(1/z^{n_j+1}), \quad z \rightarrow \infty,$$

где $j = 1, \dots, r$.

Эта задача имеет решения, поскольку она сводится к системе $|n|$ линейных однородных уравнений относительно $|n| + 1$ неизвестных коэффициентов многочлена Q_n . Единственности решения (с точностью до нормировки), вообще говоря, нет. Мы поставили так называемую задачу о совместных аппроксимациях Паде с общим знаменателем (или об аппроксимациях Эрмита–Паде второго типа). Сами аппроксимации суть рациональные функции

$$\pi_{n,j} = \frac{P_{n,j}}{Q_n}, \quad j = 1, \dots, r. \quad (1.1)$$

(II) Вторая задача состоит в нахождении многочленов $Q_{n,1}, \dots, Q_{n,r}$ таких, что

- 1) эти многочлены не равны тождественно нулю одновременно,
- 2) $\deg Q_{n,j} \leq n_j - 1$, $j = 1, \dots, r$ (считаем, что $n \neq 0$),
- 3) для некоторого многочлена P_n выполняется следующее интерполяционное условие:

$$(Q_{n,1}f_1 + \dots + Q_{n,r}f_r - P_n)(z) = O(1/z^{|n|}), \quad z \rightarrow \infty.$$

Эта задача также имеет решение (вообще говоря, не единственное). Она называется задачей о линейной форме (или об аппроксимациях Эрмита–Паде первого типа).

Совместные аппроксимации впервые появились в знаменитой работе Шарля Эрмита 1873 г. [6] о трансцендентности числа e . Формальная теория аппроксимаций Эрмита–Паде с исчерпывающей полнотой изложена в работе К. Малера [7]. Эта работа была написана К. Малером в 30-е годы, когда он начал успешно применять совместные аппроксимации в теории чисел (например, для доказательства трансцендентности логарифмов рациональных [8], а затем и алгебраических [9] чисел). Но опубликована работа была лишь в 1968 г., когда интерес к совместным аппроксимациям резко возрос. С понятием аппроксимаций Эрмита–Паде можно также ознакомиться по работе Е. М. Никишина [10] или по монографии [11].

Кроме двух основных задач, сформулированных выше (и ставших уже классическими), в последнее время появилось много новых постановок, в которых интерполяция проводится не в одной точке $z = \infty$, а в нескольких точках, вместо многочленов второго рода $P_{n,j}$ рассматривают рациональные функции с фиксированными полюсами, используют смешанные постановки, содержащие как условия типа (I), так и условия типа (II) (см., например, [12], [13]). Такие конструкции вводят не ради обобщений (основные теоремы имеют смысл доказывать лишь для классических постановок, тогда они легко распространяются и на различные обобщения). Их необходимость вызвана приложениями в теории чисел, и вид конструкции продиктован конкретными особенностями решаемой задачи. Имеет смысл сохранить термин “аппроксимации Эрмита–Паде” за всеми этими обобщенными конструкциями.

1.2. Системы Анжелеско и Никишина. С точки зрения математического анализа основным вопросом является задача о сходимости или об асимптотическом поведении совместных аппроксимаций (для определенности говорим о задаче (I)). Наиболее полные результаты в этом направлении были получены для модельного случая марковских функций:

$$f_j(z) = \int_{\Delta_j} \frac{d\mu_j(x)}{z - x}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (1.2)$$

где μ_j — конечная положительная борелевская мера на компактном отрезке Δ_j вещественной оси (и как правило, предполагают, что $\mu'_j(x) > 0$ для п.в. по мере Лебега $x \in \Delta_j$). Представляют интерес системы марковских функций, для которых задача (I) имеет единственное (с точностью до нормировки) решение. Хорошо известны следующие два основных класса единственности, это — системы Анжелеско и системы Никишина.

Системой Анжелеско называется система марковских функций (1.2), для которой отрезки Δ_j попарно не пересекаются. Еще в 1918 г. Анжелеско [14], [15] сделал простое, но любопытное наблюдение, что в этом случае из соотношений ортогональности и соответствующих свойств нулей многочлена Q_n вытекает единственность решения. В работе [16] Е. М. Никишин вновь рассмотрел систему Анжелеско. Из проведенного им анализа коэффициентов Кристоффеля (вычетов рациональных функций (1.1)) стало ясно, что доказательство классической теоремы Маркова на этот случай не переносится. Первый результат о сходимости совместных аппроксимаций для конкретной системы Анжелеско (для двух логарифмов) был получен В. А. Калягиным [17]. В общем виде и в полном объеме эта задача была решена А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым [1]. По-существу, в этой работе был создан новый метод (метод теории потенциала, см. также [2], [3]), не только позволивший полностью исследовать систему Анжелеско, но и в дальнейшем успешно применявшийся к различным трудным задачам (например, к задаче о наилучших рациональных приближениях экспоненты [4]). В работе [1] впервые был обнаружен так называемый эффект столкновения зарядов и появляющиеся вследствие этого области расходимости аппроксимаций. Сильная асимптотика аппроксимаций для систем Анжелеско была получена А. И. Аптекаревым [18]. Подробнее об асимптотике аппроксимаций Эрмита–Паде см. [19]–[21].

Системы Никишина появились в работах [10], [22]. Эти системы определяются по индукции. Система Никишина порядка r — это система марковских функций (1.2), для которой все отрезки Δ_j совпадают между собой ($\Delta_j = \Delta$, $j = 1, \dots, r$), а меры абсолютно непрерывны относительно $d\mu_1$, точнее

$$d\mu_j = u_j d\mu,$$

где $u_1 = 1$, а функции $u_2, \dots, u_r$ образуют систему Никишина порядка $r - 1$ на некотором отрезке F , не пересекающемся с отрезком Δ . Полное исследование задачи (II) для таких систем с использованием метода теории потенциала Е. М. Никишин провел в работе [22]. Задача (I) оказалась более трудной. В [10] она была решена лишь частично, при этом использовался подход из доказательства теоремы Маркова, основанный на положительности коэффициентов Кристоффеля. В дальнейшем этот метод развивали Г. Шталь и К. Драйвер [23]. Предложенный А. А. Гончаром метод решения этой задачи, основанный на равновесии потенциала во внешнем поле, мы развили в работе [24]. Сильную асимптотику для систем Никишина получил А. И. Аптекарев [25]. На первый взгляд, определение системы Никишина кажется очень специальным. Однако простые рассуждения показывают, что это определение тесно связано с конструкциями римановых поверхностей многозначных аналитических функций, и поэтому не удивительно, что в дальнейшем все интересные системы, появлявшиеся при решении конкретных задач, оказывались системами Никишина.

Естественным образом встает вопрос о возможности объединения этих двух основных систем (Анжелеско и Никишина) в одну конструкцию. Этот вопрос был решен в работе [5], где методом теории потенциала изучалось асимптотическое поведение

Рис. 1а. Система Анжелеско

Рис. 1б. Система Никишина

Рис. 1с. Смешанная система

ние решений задачи (I) для системы марковских функций, образующих произвольный граф-дерево (примеры таких графов изображены на рис. 1).

Такой общий подход позволил максимально упростить доказательства. В частности, в работе [5] приводится первое полное исследование классической системы Никишина. Из предшествующих работ отметим [26], [27].

Следуя работе [5], приведем здесь определение обобщенной системы Никишина (системы Анжелеско–Никишина), соответствующей произвольному графу-дереву, и на примере знаменателей аппроксимаций Эрмита–Паде для таких систем сформулируем типичный результат асимптотического характера в терминах равновесных потенциалов.

Пусть G – непустое конечное частично упорядоченное множество. Отношение порядка обозначаем $\alpha \preceq \beta$. Будем писать $\alpha \prec \beta$, если $\alpha \preceq \beta$ и $\alpha \neq \beta$. Добавим к множеству G корневую вершину $\bar{U}$:

$$\bar{G} = G \cup \{\bar{U}\},$$

которая по определению меньше любого элемента множества G . Пусть выполнена следующая аксиома:

(R) для любого $\alpha \in G$ отрезок

$$\{\beta \in \bar{G} : \beta \prec \alpha\}$$

имеет наибольший элемент α' .

Мы говорим, что вершина α непосредственно следует за вершиной α' , и записываем это отношение следующим образом: $\alpha' \rightarrow \alpha$. Частично упорядоченное множество G , для которого выполнена аксиома (R), назовем графом-деревом (или просто графом).

Пусть σ — (конечная положительная борелевская) мера с компактным носителем $S(\sigma)$ на вещественной прямой. Обозначим $\Delta(\sigma)$ наименьший отрезок, содержащий носитель меры, и

$$\widehat{\sigma}(x) = \int \frac{d\sigma(t)}{x-t}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus \Delta(\sigma),$$

преобразование Коши этой меры. Если σ_1 и σ_2 — две меры такие, что отрезки $\Delta(\sigma_1)$ и $\Delta(\sigma_2)$ не пересекаются, то вводим обозначение

$$d\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \widehat{\sigma}_2 d\sigma_1,$$

и далее по индукции

$$\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m \rangle = \langle \sigma_1, \langle \sigma_2, \dots, \sigma_m \rangle \rangle$$

(если выполнены соответствующие условия для носителей мер).

Пусть заданы отрезки вещественной оси F_α и меры σ_α с носителями на этих отрезках, $\alpha \in \mathbf{G}$. Потребуем, чтобы отрезки F_α и F_β не пересекались, когда вершины α и β связаны либо отношением следования ($\alpha \rightarrow \beta$ или $\beta \rightarrow \alpha$) либо отношением соседства (α и β непосредственно следуют за одной вершиной). Согласно аксиоме (R) для любой вершины $\alpha \in \mathbf{G}$ существует и единственная определяющая эту вершину цепь вида

$$\mathcal{U} \rightarrow \gamma \rightarrow \beta \rightarrow \dots \rightarrow \alpha.$$

Положим

$$s_\alpha = \langle \sigma_\gamma, \sigma_\beta, \dots, \sigma_\alpha \rangle.$$

Тогда обобщенной системой Никишина называется система марковских функций

$$\{\widehat{s}_\alpha : \alpha \in \mathbf{G}\}.$$

Всюду в дальнейшем считаем, что выполнено условие:

$$\sigma'_\alpha(x) > 0 \text{ для п.в. (по мере Лебега) } x \in F_\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{G}.$$

Аппроксимации Эрмита–Паде для обобщенной системы Никишина определяются стандартным образом. Пусть

$$n \in \mathbb{Z}_+^{\mathbf{G}}$$

— мультииндекс. Тогда существует ненулевой многочлен Q_n степени не выше

$$|n| = \sum_{\alpha \in \mathbf{G}} n_\alpha$$

такой, что для некоторых многочленов $P_{n,\alpha}$ выполняются следующие интерполяционные условия:

$$(Q_n \widehat{s}_\alpha - P_{n,\alpha})(z) = O(1/z^{n_\alpha+1}), \quad z \rightarrow \infty, \quad \alpha \in \mathbf{G}.$$

Если n — монотонно убывающая функция:

$$\alpha \preceq \beta \Rightarrow n_\beta \leq n_\alpha$$

(такие индексы назовем допустимыми), то степень Q_n равна $|n|$ и этот многочлен определен единственным образом (с точностью до нормировки). Потребуем, чтобы старший коэффициент многочлена Q_n был равен единице. Нас интересует поведение этих многочленов при $n \rightarrow \infty$. Точнее, зафиксируем произвольную последовательность допустимых индексов

$$\Lambda = \{n(k)\}_{k=1}^{\infty}$$

такую, что

$$\frac{n_{\alpha}(k)}{|n(k)|} \rightarrow p_{\alpha}, \quad k \rightarrow \infty, \quad \alpha \in G,$$

где

$$\{p_{\alpha} : \alpha \in G\}$$

— некоторое распределение вероятностей на графе G . Требуется найти предел величин $|Q_n|^{1/|n|}$ при $n \rightarrow \infty, n \in \Lambda$.

Для того чтобы сформулировать необходимую нам теоретико-потенциальную задачу, введем следующие обозначения. Пусть

$$q_{\alpha} = \sum_{\alpha \preceq \beta} p_{\beta}, \quad \alpha \in G,$$

— функция распределения вероятностей на графе G . Обозначим $\mathfrak{M}_{\alpha}$ — множество мер ν_{α} с носителями на отрезке F_{α} , полная вариация которых равна $\|\nu_{\alpha}\| = q_{\alpha}$, и

$$\mathfrak{M} = \bigotimes_{\alpha \in G} \mathfrak{M}_{\alpha}$$

— декартово произведение этих множеств. Отметим, что $\mathfrak{M}$ — выпуклый компакт в $*$ -слабой топологии. Матрицу взаимодействия

$$A : G \times G \mapsto \{-1, 0, 1, 2\}$$

определим следующим образом:

$$A_{\alpha, \beta} = \begin{cases} 2, & \text{если } \alpha = \beta, \\ 1, & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ связаны отношением соседства,} \\ -1, & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ связаны отношением следования,} \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

В электростатической интерпретации эта матрица определяет характер взаимодействия зарядов, находящихся на проводниках F_{α} и F_{β} .

Логарифмическим потенциалом меры σ называется следующий интеграл Лебега:

$$V^{\sigma}(x) = \int \ln \frac{1}{|x - t|} d\sigma(t), \quad x \in \mathbb{C}.$$

Для векторной меры $\nu \in \mathfrak{M}$ положим

$$W_{\alpha}^{\nu} = \sum_{\beta \in G} A_{\alpha, \beta} V^{\nu_{\beta}}, \quad \alpha \in G.$$

Тогда существует и единственна векторная мера $\lambda \in \mathfrak{M}$ такая, что выполняются следующие условия равновесия:

$$W_\alpha^\lambda(x) = \min_{\xi \in F_\alpha} W_\alpha^\lambda(\xi), \quad x \in S(\lambda_\alpha), \quad \alpha \in \mathbf{G}.$$

Будем называть λ равновесной или экстремальной мерой. На этой мере (и только на ней) достигается минимум функционала энергии

$$J(\lambda) = \min_{\nu \in \mathfrak{M}} J(\nu),$$

где

$$J(\nu) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbf{G}} A_{\alpha\beta} \int V^{\nu_\alpha} d\nu_\beta.$$

Отметим, что J – выпуклый и полунепрерывный снизу функционал на $\mathfrak{M}$.

Обозначим

$$F = \bigcup_{\mathfrak{U} \rightarrow \alpha} F_\alpha, \quad V = \sum_{\mathfrak{U} \rightarrow \alpha} V^{\lambda_\alpha},$$

где объединение и сумма берутся по всем минимальным вершинам графа $\mathbf{G}$. Имеет место следующий результат.

Равномерно внутри области $\mathbb{C} \setminus F$ существует предел

$$\lim_{n \in \Lambda} \frac{1}{|n|} \ln |Q_n| = -V.$$

Аналогичные утверждения справедливы и для функций второго рода.

С рассмотренной выше теоретико-потенциальной задачей тесно связана $\mathfrak{m}$ -листная риманова поверхность $\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{m} = \sharp \overline{\mathbf{G}}$ – число вершин расширенного графа. Эта поверхность состоит из листов $\mathfrak{S}_\alpha$, $\alpha \in \overline{\mathbf{G}}$, где $\mathfrak{S}_\alpha$ – расширенная комплексная плоскость с разрезами вдоль носителей экстремальной меры $S(\lambda_\alpha)$ и $S(\lambda_\beta)$ для всех β , непосредственно следующих за α . Если $\alpha \rightarrow \beta$, то листы $\mathfrak{S}_\alpha$ и $\mathfrak{S}_\beta$ склеиваются на разрезе $S(\lambda_\alpha)$ (верхний берег разреза на одном листе с нижним берегом того же разреза на другом листе). В случае, когда все носители $S(\lambda_\alpha)$ – отрезки (и только в этом случае), поверхность $\mathfrak{S}$ гомеоморфна сфере (имеет род $\mathfrak{g} = 0$). Тогда существует и единственна (с точностью до мультипликативной константы) мероморфная на этой римановой поверхности функция ϕ , которая определяется следующим дивизором:

$$\begin{cases} \infty & \text{на листе } \mathfrak{S}_{\mathfrak{U}} - \text{нуль порядка } \mathfrak{m}, \\ \infty & \text{на листе } \mathfrak{S}_\alpha - \text{простой полюс, } \alpha \in \mathbf{G}. \end{cases}$$

Нормируем эту функцию условием

$$\phi(z) \sim \frac{1}{z^{\mathfrak{m}}}, \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{U}}.$$

Обозначим ϕ_α ограничение ϕ на лист $\mathfrak{S}_\alpha$. Тогда для равномерного распределения вероятностей на графе $\mathbf{G}$ имеем

$$V = \frac{1}{\mathfrak{m}} \ln |\phi_{\mathfrak{U}}|.$$

В общем случае (для любого рода $\mathfrak{g}$ и для любого распределения вероятностей) равновесные потенциалы могут быть записаны в терминах абелевых интегралов 3-го рода на поверхности $\mathfrak{S}$.

Поиск новых классов единственности и их исследование методом теории потенциала представляют собой открытую интересную задачу. При этом имеет смысл в первую очередь обратить внимание на те системы, которые возникают в приложениях. К ним относятся, например, системы, образующие не граф-дерево, а граф с замкнутыми циклами. Они появляются, в частности, как произведения функций системы Анжелеско. Такая ситуация возникла, например, в работе М. Хаты [28] (см. рис. 2).

Рис. 2. Циклический граф

Вопросы единственности решения задачи (I) или (II), асимптотического поведения и сходимости аппроксимаций для таких циклических графов полностью открыты. Для них нет никаких общих результатов, и даже нет ни одного конкретного примера (в работе [28] Хата заменяет циклический граф на граф-дерево).

В настоящей работе мы рассмотрим один пример такой задачи. В разделе 2 строится соответствующий циклический граф функций. В разделе 3 обсуждается постановка задачи Эрмита–Пале для этого графа. Один из основных результатов работы заключается в нахождении явного вида аппроксимаций (теорема 1 из раздела 4). Другой основной результат – это асимптотика аппроксимаций (теорема 2 из раздела 5). В разделе 6 устанавливается связь изучаемой конструкции с числами Аперы. На обсуждении результата Р. Аперы мы подробнее остановимся в следующем пункте.

1.3. Обзор результатов об арифметической природе значений дзета-функции. Как было отмечено выше, второй отправной точкой для написания настоящей работы послужил результат Р. Аперы. Вопрос об арифметической природе чисел

$$\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots \quad (1.3)$$

восходит к Л. Эйлеру. Здесь

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1,$$

– дзета-функция. Первый и пока единственный результат в этом направлении был получен в 1979 г. французским математиком Роджером Аперы [29]. Он доказал, что число $\zeta(3)$ иррациональное. Сразу после опубликования этого результата было сделано много попыток обобщить его на другие значения дзета-функции. Однако все эти попытки не увенчались успехом, и авторы ограничивались обсуждением результата

Апери [30]–[32]. Хотя недавно в работе [33] из общих соображений было показано, что среди чисел (1.3) есть бесконечно много иррациональных (см. также [34]). Более успешно обстояло дело с доказательством теоремы Апери. В своей работе Р. Апери предъявил диофантовы приближения числа $\zeta(3)$ и доказал, что они решают задачу об иррациональности этого числа, но он не объяснил, как именно он пришел к этим приближениям. Вскоре в работах [35], [36] Ф. Бекерс предложил простую интерполяционную конструкцию (аппроксимации Эрмита–Паде), естественным образом приводящую к числам Апери и к теореме Апери. Затем появилось много других аналогичных конструкций, принадлежащих В.Н. Сорокину [37], [38], Ю.В. Нестеренко [39], М. Прево [40], Л. Гутнику [41]. Все эти конструкции являются аппроксимациями Эрмита–Паде различных систем (но почему-то они всегда приводят к числам Апери). Наличие такого большого числа различных доказательств теоремы Апери легко объяснимо. Каждый раз, предлагая новое доказательство, автор надеется, что оно может быть обобщено на другие значения дзета-функции. К сожалению, пока все эти надежды оказались тщетными. Анализ всех известных доказательств показывает, что это аппроксимации систем Никишина. Естественно попытаться использовать другие графы. По-видимому, графов-деревьев также недостаточно, хотя с их помощью можно получать другие интересные результаты в теории диофантовых приближений (см., например, [42]–[44]). В то же время, используя циклические графы, можно построить хорошие приближения для чисел (1.3). Учитывая перспективу такого направления исследований, мы предлагаем в этой работе конструкцию, использующую циклический граф и доказывающую иррациональность числа $\zeta(3)$.

2. Что приближаем?

2.1. Циклический граф. Определим функции

$$A, d, f, e, \quad (2.1)$$

голоморфные и равные нулю в бесконечности, следующей системой дифференциальных уравнений:

$$A'(z) = \frac{d(z) - d(1)}{1 - z} - \frac{f(z) - f(0)}{z}, \quad (2.2a)$$

далее,

$$d'(z) = -\frac{e(z)}{z}, \quad f'(z) = \frac{e(z)}{1 - z}, \quad (2.2b)$$

и, наконец,

$$e'(z) = \frac{1}{z(1 - z)}. \quad (2.2c)$$

Будем использовать обозначения

$$\begin{aligned} d^\dagger(z) &= d(z) - d(1), \\ f^\dagger(z) &= f(z) - f(0). \end{aligned}$$

Естественно рассматривать функции (2.1) как вершины следующего графа:

$$\begin{array}{ccccc} & & d^\dagger & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ A & & & & e \longrightarrow 1 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & f^\dagger & & \end{array} \quad (2.3)$$

Систему (2.2) легко проинтегрировать в терминах степенных рядов, а именно:

$$e(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{z^m} \frac{1}{m}, \quad (2.4a)$$

далее,

$$d(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{z^m} \frac{1}{m^2}, \quad f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{z^m} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}, \quad (2.4b)$$

и, наконец,

$$A(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{z^m} \left(\frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \frac{1}{m} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right). \quad (2.4c)$$

Областью сходимости каждого из рядов (2.4) является внешность единичного круга $|z| > 1$. Тогда $e(z)$ – это логарифмическая функция:

$$e(z) = -\ln(1 - 1/z)$$

(главная ветвь логарифма), $d(z)$ – так называемый второй полилогарифм. При этом

$$d(1) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Система (2.1) обладает определенными свойствами симметрии относительно преобразования

$$z \mapsto 1 - z,$$

а именно:

$$\begin{aligned} e(1 - z) &= -e(z), \\ A(1 - z) &= -A(z) \end{aligned}$$

(будем называть такие функции нечетными), а также

$$f(1 - z) = -d(z).$$

Отметим арифметические свойства коэффициентов степенных рядов (2.4). Коэффициенты $\check{d}_m$, $\check{f}_m$ и $\check{e}_m$ рядов d , f и e соответственно суть рациональные числа. Напротив, коэффициенты $\check{A}_m$ ряда A – числа иррациональные. Однако иррациональная часть этого ряда легко выделяется, а именно:

$$A(z) = -d(1)e(z) + A^R(z),$$

где

$$A^R(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{z^m} \left(\frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \right).$$

Коэффициенты $\check{A}_m^R$ ряда A^R – снова рациональные числа. Обозначим

$$\omega_N = \text{LCM}\{1, \dots, N\}.$$

Тогда для $m = 1, \dots, N$ числа

$$\omega_N \check{e}_m, \quad \omega_N^2 \check{d}_m, \quad \omega_N^2 \check{f}_m, \quad \omega_N^3 \check{A}_m^R$$

суть целые рациональные.

2.2. Граф весовых функций. Функции (2.1) аналитически продолжаются из внешности единичного круга в плоскость с разрезом

$$\mathbb{G}_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_0, \quad \Delta_0 = [0, 1].$$

Эти функции – марковские. Интегрированием по частям легко проверяются следующие интегральные представления:

$$e(z) = \int_0^1 \frac{1}{z-x} dx, \quad (2.5a)$$

далее,

$$d(z) = \int_0^1 \frac{\varepsilon(x)}{z-x} dx, \quad (2.5b)$$

где

$$\varepsilon(x) = \ln \frac{1}{x},$$

и

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varepsilon^*(x)}{z-x} dx, \quad (2.5c)$$

где

$$\varepsilon^*(x) = \ln \frac{1}{1-x},$$

и, наконец,

$$A(z) = \int_0^1 \frac{\omega(x)}{z-x} dx, \quad (2.5d)$$

где

$$\omega(x) = \varepsilon(x)\varepsilon^*(x).$$

Весовые функции ε , ε^* и ω будут в дальнейшем играть не только вспомогательную роль, но будут явно входить в постановку интерполяционной задачи. Поэтому рассмотрим свойства этих функций более подробно. Функцию $\varepsilon(x)$ мы определим как функцию, голоморфную в области

$$\mathbb{G}_- = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_-, \quad \Delta_- = [-\infty, 0],$$

а функцию $\varepsilon^*(x)$ – как функцию, голоморфную в области

$$\mathbb{G}_+ = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_+, \quad \Delta_+ = [1, +\infty]$$

(берутся главные ветви логарифмов). Тогда функция $\omega(x)$ будет голоморфна в области

$$\mathbb{G} = \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_- \cup \Delta_+).$$

В круге $|1-x| < 1$ функция $\varepsilon(x)$ раскладывается в следующий степенной ряд с рациональными коэффициентами:

$$\varepsilon(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (1-x)^m \frac{1}{m}.$$

В круге $|x| < 1$ функция $\varepsilon^*(x)$ раскладывается в аналогичный ряд

$$\varepsilon^*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x^m \frac{1}{m}.$$

Имеют место соотношения

$$\varepsilon^*(1-x) = \varepsilon(x)$$

и

$$\omega(1-x) = \omega(x)$$

(четная функция), а также

$$\varepsilon^*(x) = e(1/x).$$

Справедливы формулы дифференцирования

$$\omega'(x) = \frac{\varepsilon(x)}{1-x} - \frac{\varepsilon^*(x)}{x},$$

а также

$$\varepsilon'(x) = -\frac{1}{x}, \quad \varepsilon^{*'}(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Естественно изображать весовые функции вершинами графа, аналогичного графу (2.3).

Непосредственным интегрированием проверяются следующие интегральные представления:

$$\frac{\varepsilon(x)}{1-x} = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x-t} \frac{dt}{1-t} \quad (2.6a)$$

и

$$\frac{\varepsilon^*(x)}{x} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t-x} \frac{dt}{t}, \quad (2.6b)$$

а также

$$\frac{\omega(x)}{x(1-x)} = \int_{-\infty}^0 \frac{\varepsilon^*(t)}{x-t} \frac{dt}{t(1-t)} + \int_1^{+\infty} \frac{\varepsilon(t)}{t-x} \frac{dt}{t(1-t)}. \quad (2.6c)$$

2.3. Связь циклического графа с числом $\zeta(3)$. Исследуем поведение функции $d^\dagger(z)$ в окрестности точки $z = 1$ и функции $f^\dagger(z)$ в окрестности точки $z = 0$. Введем специальные функции

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (1-x)^m \check{f}_m \quad (2.7)$$

и

$$\varphi^*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x^m \check{f}_m. \quad (2.8)$$

Ряд (2.7) сходится в круге $|1-x| < 1$, а ряд (2.8) – в круге $|x| < 1$. Справедливы соотношения

$$\varphi(x) = \varphi^*(1-x), \quad \varphi^*(x) = f(1/x).$$

Следовательно, функция $\varphi(x)$ аналитически продолжается в область $\mathbb{G}_-$, а функция φ^* – в область $\mathbb{G}_+$. Имеют место следующие формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\frac{\varepsilon(x)}{x(1-x)}, \\ \varphi^{*'}(x) &= \frac{\varepsilon^*(x)}{x(1-x)}.\end{aligned}$$

Простым дифференцированием легко проверяются следующие тождества:

$$d^\dagger(z) = \varphi(z) + \varepsilon(z)e(z), \quad (2.9a)$$

$$f^\dagger(z) = -\varphi^*(z) + \varepsilon^*(z)e(z). \quad (2.9b)$$

Итак, мы определили набор специальных функций

$$A, d, f, e, \varepsilon, \varepsilon^*, \varphi, \varphi^*,$$

для которых в следующем разделе будет поставлена интерполяционная задача.

В заключение этого раздела докажем, что $A(1) = \zeta(3)$. Действительно,

$$A(1) = \int_0^1 \frac{\omega(x)}{1-x} dx = \int_0^1 \frac{\varepsilon^*(x)}{x} \varepsilon(x) dx = \int_0^1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} x^{m-1} \varepsilon(x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} = \zeta(3).$$

Что требовалось доказать. Как следствие получим $A(0) = -\zeta(3)$.

3. Как приближаем?

3.1. Постановка задачи Эрмита–Паде для циклического графа. Поставим следующую задачу.

ЗАДАЧА 1 (основная задача о линейной форме). Для данного целого неотрицательного числа n требуется найти нетривиальный набор многочленов: A_n – степени не выше $2n$, D_n и F_n – степени не выше $3n$, E_n и J_n – степени не выше $4n$, такой, что выполняются следующие интерполяционные условия:

$$e_n(z) := -A_n(z)e(z) + \begin{cases} -\frac{D_n(z)}{(1-z)^n} \\ \frac{F_n(z)}{z^n} \end{cases} = O(1/z^{2n+1}), \quad z \rightarrow \infty, \quad (3.1)$$

и

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n^R(z) &:= A_n(z)A^R(z) + \begin{cases} \frac{D_n(z)}{(1-z)^n}d(z) \\ \frac{F_n(z)}{z^n}f(z) \end{cases} + \frac{E_n(z)e(z) + J_n(z)}{z^n(1-z)^n} \\ &= O(1/z^{2n+1}), \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.2)$$

далее,

$$\varepsilon_n(x) := A_n(x)\varepsilon(x) + \frac{F_n(x)}{x^n} = O((1-x)^{n+1}), \quad x \rightarrow 1, \quad (3.3)$$

и

$$D_n(x)\varepsilon(x) + \frac{E_n(x)}{x^n} = O((1-x)^{2n+1}), \quad x \rightarrow 1, \quad (3.4)$$

а также

$$\varepsilon_n^* := A_n(x)\varepsilon^*(x) + \frac{D_n(x)}{(1-x)^n} = O(x^{n+1}), \quad x \rightarrow 0, \quad (3.5)$$

и

$$F_n(x)\varepsilon^*(x) + \frac{E_n(x)}{(1-x)^n} = O(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0, \quad (3.6)$$

и, наконец,

$$\varphi_n(z) := D_n(z)\varphi(z) + \frac{J_n(z)}{z^n} = O((1-z)^n), \quad z \rightarrow 1, \quad (3.7)$$

и

$$\varphi_n^*(z) := -F_n(z)\varphi^*(z) + \frac{J_n(z)}{(1-z)^n} = O(z^n), \quad z \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

Если записать все многочлены с неопределенными коэффициентами, то мы получим

$$(2n+1) + 2(3n+1) + 2(4n+1) = 16n+5$$

неизвестных величин. Условия задачи представляют собой систему

$$2(4n+1) + 2((n+1) + (2n+1)) + 2n = 16n+6$$

линейных однородных уравнений. Однако если подсчитать число неизвестных и число уравнений, учитывая симметрию задачи, то легко убедиться в том, что нетривиальное решение системы существует, причем в классе многочленов, удовлетворяющих следующим условиям симметрии:

$$\begin{aligned} A_n(1-z) &= A_n(z), & D_n(1-z) &= F_n(z), \\ E_n(1-z) &= E_n(z), & J_n(1-z) &= -J_n(z). \end{aligned}$$

Поскольку система имеет вещественные (и даже рациональные) коэффициенты, то можно считать, что неизвестные многочлены также имеют вещественные (рациональные) коэффициенты.

Проанализируем систему. Из уравнений (3.1), (3.3) и (3.5) находим многочлены D_n и F_n (линейно выражаем эти многочлены через коэффициенты многочлена A_n). Затем из уравнений (3.4), (3.6) находим многочлен E_n . После этого уравнение (3.2) будет определять многочлен J_n . И, наконец, оставшиеся условия (3.7), (3.8) представляют собой систему $2n$ линейных однородных уравнений относительно $2n+1$ неизвестных коэффициентов многочлена A_n .

На первый взгляд задача 1 производит весьма странное впечатление. Поэтому дальнейшие пункты этого раздела будут посвящены разъяснению условий задачи.

3.2. Анализ условий задачи в бесконечности. Учитывая структуру графа (2.3), рассмотрим следующую функцию:

$$\mathcal{A}_n(z) := A_n(z)A(z) + \begin{cases} \frac{D_n(z)}{(1-z)^n}d^\dagger(z) \\ \frac{F_n(z)}{z^n}f^\dagger(z) \end{cases} + \frac{E_n(z)e(z) + J_n(z)}{z^n(1-z)^n}.$$

Отметим, что коэффициенты линейной формы $\mathcal{A}_n$ не многочлены, как в большинстве аналогичных конструкций, а рациональные функции с фиксированными полюсами.

Напишем стандартное в теории аппроксимаций Эрмита–Паде интерполяционное условие – потребуем, чтобы функция $\mathcal{A}_n$ имела в бесконечности нуль высокого порядка, а именно:

$$\mathcal{A}_n(z) = O(1/z^{2n+1}), \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Это условие представляет собой систему линейных однородных уравнений с иррациональными коэффициентами. Имея в виду дальнейшие арифметические приложения, мы хотим получить в качестве решения многочлены с рациональными коэффициентами. Поэтому мы профакторизуем систему (3.9), выделив в ней рациональную и иррациональную часть. Другими словами, мы заменим одно интерполяционное условие (3.9) следующими двумя условиями. Выделяя множитель $d(1)$, получим (3.1), а выделяя рациональную часть, получим (3.2). В частности, из второго условия следует, что многочлен J_n равен полиномиальной части соответствующего ряда и фактически имеет степень не выше $4n - 1$.

3.3. Анализ условий на весовые функции. Функция $\mathcal{A}_n(z)$ голоморфна вне отрезка Δ_0 . Рассмотрим ее весовую функцию $\omega_n(x)$, которую определим формулами Сохоцкого

$$\omega_n(x) := \frac{1}{\pi i} \operatorname{Im} \mathcal{A}_n(x - i \cdot 0), \quad 0 < x < 1.$$

Тогда, как следует из формул (2.5),

$$\omega_n(x) = A_n(x)\omega(x) + \begin{cases} \frac{D_n(x)}{(1-x)^n}\varepsilon(x) \\ \frac{F_n(x)}{x^n}\varepsilon^*(x) \end{cases} + \frac{E_n(x)}{x^n(1-x)^n}. \quad (3.10)$$

Функция $\omega_n(x)$ голоморфна в области $\mathbb{G}$. Потребуем, чтобы она имела в точках $x = 0$ и $x = 1$ нули высокого порядка. Здесь необходимо сделать следующее замечание. Функция $\omega_n(x)$ не является голоморфной в указанных точках – она имеет в этих точках логарифмические особенности. Поэтому мы будем требовать нуль высокого порядка с точностью до умножения на соответствующий логарифм. В дальнейшем, для того чтобы не вводить лишние обозначения, мы будем в том же смысле понимать и символ O . Итак, потребуем, чтобы

$$\omega_n(x) = \begin{cases} O((1-x)^{n+1}), & x \rightarrow 1, \\ O(x^{n+1}), & x \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Из формулы (3.10) следует, что условие (3.11) равносильно системе (3.3)–(3.6).

3.4. Анализ условий задачи в точках ветвления. В рамках арифметических приложений нас будут интересовать значения $\mathcal{A}_n(0)$ и $\mathcal{A}_n(1)$. Поэтому потребуем, чтобы эти значения были конечными:

$$\mathcal{A}_n(0) \neq \infty, \quad \mathcal{A}_n(1) \neq \infty.$$

Проанализируем эти условия. Значение $A(1)$ конечное. Из (3.3) следует, что $F_n(1) = 0$. Поскольку функция $f(z)$ имеет в точке $z = 1$ логарифмическую особенность, то

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{F_n(z)}{z^n} f^\dagger(z) = 0.$$

Осталось рассмотреть числитель

$$D_n(z)d^\dagger(z) + \frac{E_n(z)e(z) + J_n(z)}{z^n},$$

который в соответствии с (2.9) можно записать в виде

$$\left(D_n(z)\varepsilon(z) + \frac{E_n(z)}{z^n} \right) e(z) + \left(D_n(z)\varphi(z) + \frac{J_n(z)}{z^n} \right).$$

Тогда первая скобка должна иметь в точке $z = 1$ нуль по крайней мере $(n+1)$ -го порядка (но это условие выполняется в силу (3.4)), а вторая – нуль по крайней мере n -го порядка, что приводит к (3.7). Аналогично, условие $\mathcal{A}_n(0) \neq \infty$ приводит к (3.8).

Мы полностью проанализировали задачу 1. В частности,

$$\mathcal{A}_n(1) = A_n(1)\zeta(3) - \phi_n,$$

где рациональное число ϕ_n определяется как первый коэффициент следующего разложения:

$$\varphi_n(z) = -\phi_n(1-z)^n + \dots$$

Условия (3.11) на вес должны обеспечить быстрое стремление к нулю величин $\mathcal{A}_n(1)$. Это будет наш претендент на диофантово приближение числа $\zeta(3)$. (С равным успехом можно использовать величины $\mathcal{A}_n(0)$.)

4. Формулы Родрига и интегральное представление

4.1. Интегральное представление решений (теорема 1). Одним из результатов работы является

ТЕОРЕМА 1. 1) *Решение задачи 1 существует и единственно (с точностью до нормировки).*

2) *Справедливо интегральное представление*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n(z) = & \int_0^1 \frac{x^{3n+1}(1-x)^{3n+1}}{(z-x)^{2n+1}} dx \int_1^\infty \frac{1}{(x(1-x) - t(1-t))^{n+1}} \frac{(2t-1)dt}{t^{n+1}(1-t)^{n+1}} \\ & \cdot \int_1^t \frac{(s(1-s) - t(1-t))^n}{s^{2n+1}(1-s)^{2n+1}} ds \int_1^s (s-r)^{2n} r^n (1-r)^n dr. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Все последующие пункты настоящего раздела будут посвящены доказательству теоремы 1. Основное внимание будет уделено нахождению функции $\mathcal{A}_n$. При этом мы будем изначально предполагать, что эта функция – нечетная. Однако из приводимых ниже рассуждений вытекает единственность решения (в классе нечетных функций). Если мы повторим все рассуждения для четной функции $\mathcal{A}_n$, то придем к выводу, что $\mathcal{A}_n \equiv 0$.

4.2. Формула Родрига. Первый шаг в решении задачи 1 – это стандартный переход от интерполяции в бесконечности к соотношениям ортогональности и далее к формуле Родрига.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача 2. Для данного целого неотрицательного числа n требуется найти нетривиальный набор многочленов: $\tilde{A}_n$ – степени не выше $2n$, $\tilde{D}_n$ и $\tilde{F}_n$ – степени не выше $3n$, и $\tilde{E}_n$ – степени не выше $4n$, такой, что выполняются следующие интерполяционные условия:

$$\tilde{e}_n(x) := -\tilde{A}_n(x)e(x) + \begin{cases} \frac{-\tilde{D}_n(x)}{(1-x)^n} \\ \frac{\tilde{F}_n(x)}{x^n} \end{cases} = O(1/x), \quad x \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

далее,

$$\tilde{\varepsilon}_n(x) := \tilde{A}_n(x)\varepsilon(x) + \frac{\tilde{F}_n(x)}{x^n} = O((1-x)^{2n+1}), \quad x \rightarrow 1, \quad (4.3)$$

и

$$\tilde{D}_n(x)\varepsilon(x) + \frac{\tilde{E}_n(x)}{x^n} = O((1-x)^{3n+1}), \quad x \rightarrow 1, \quad (4.4)$$

а также

$$\tilde{\varepsilon}_n^*(x) := \tilde{A}_n(x)\varepsilon^*(x) + \frac{\tilde{D}_n(x)}{(1-x)^n} = O(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0, \quad (4.5)$$

и

$$\tilde{F}_n(x)\varepsilon^*(x) + \frac{\tilde{E}_n(x)}{(1-x)^n} = O(x^{3n+1}), \quad x \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

Задача 2 представляет собой систему

$$(2n+1) + 2((2n+1) + (3n+1)) = 12n+5$$

линейных однородных уравнений относительно

$$(2n+1) + 2(3n+1) + (4n+1) = 12n+4$$

неизвестных коэффициентов.

Обозначим

$$\tilde{\omega}_n(x) = \tilde{A}_n(x)\omega(x) + \begin{cases} \frac{\tilde{D}_n(x)}{(1-x)^n}\varepsilon(x) \\ \frac{\tilde{F}_n(x)}{x^n}\varepsilon^*(x) \end{cases} + \frac{\tilde{E}_n(x)}{x^n(1-x)^n}.$$

Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливо интегральное представление*

$$\mathcal{A}_n(z) = \int_0^1 \frac{\omega_n(x)}{z-x} dx, \quad (4.7)$$

где весовая функция $\omega_n(x)$ определяется формулой Родрига

$$\omega_n(x) = \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{2n} (x^n(1-x)^n \tilde{\omega}_n(x)). \quad (4.8)$$

Интегрированием по частям получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедливо интегральное представление*

$$\mathcal{A}_n(z) = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n \tilde{\omega}_n(x)}{(z-x)^{2n+1}} dx. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Из условий задачи 1 следует, что, во-первых, функция $\omega_n(x)$ фактически служит весом для функции $\mathcal{A}_n(z)$, т.е. имеет место интегральное представление (4.7), и, во-вторых, справедливы следующие соотношения ортогональности:

$$\int_0^1 \omega_n(x) x^m dx = 0, \quad m = 0, \dots, 2n-1. \quad (4.10)$$

Определим $\omega_n(x)$ формулой Родрига (4.8). Из формул дифференцирования раздела 2 следует, что $\omega_n(x)$ имеет вид (3.10). Условия (4.3)–(4.6) означают, что

$$\tilde{\omega}_n(x) = \begin{cases} O((1-x)^{2n+1}), & x \rightarrow 1, \\ O(x^{2n+1}), & x \rightarrow 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Из (4.11) вытекают, во-первых, условия (3.3)–(3.6) и, во-вторых, возможность интегрированием по частям доказать соотношения ортогональности (4.10).

И, наконец, из (4.2) следует (3.1).

Предложение 1 доказано.

4.3. Интегральное представление вспомогательной весовой функции.

В предыдущем пункте мы осуществили редукцию задачи 1 к задаче 2. Перейдем к решению этой вспомогательной задачи.

Введем функцию

$$\lambda(x) := \varepsilon^*(x) - \varepsilon(x) = \ln \frac{x}{1-x}.$$

Функция $\lambda(x)$ голоморфна в области $\mathbb{G}$. Она нечетная (относительно преобразования $x \mapsto 1-x$):

$$\lambda(1-x) = -\lambda(x).$$

Производная этой функции вычисляется по формуле

$$\lambda'(x) = \frac{1}{x(1-x)}.$$

Функция $\lambda(x)$ раскладывается в следующий ряд Тейлора:

$$\lambda(x) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2m+1}}{2m+1}.$$

Этот ряд имеет рациональные коэффициенты и сходится в круге $|2x-1| < 1$.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

ЗАДАЧА 3. Для данного целого неотрицательного числа n требуется найти нетривиальный набор многочленов: $\overline{A}_n$ – степени не выше $2n$, $\overline{D}_n$ и $\overline{F}_n$ – степени не выше $3n$, такой, что выполняются следующие интерполяционные условия:

$$\overline{e}_n(t) := -\overline{A}_n(t)e(t) + \begin{cases} -\frac{\overline{D}_n(t)}{(1-t)^n} \\ \frac{\overline{F}_n(t)}{t^n} \end{cases} = O(1/t), \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.12)$$

далее,

$$\overline{\varepsilon}_n(t) := \overline{A}_n(t)\varepsilon(t) + \frac{\overline{F}_n(t)}{t^n} = O((1-t)^{2n+1}), \quad t \rightarrow 1, \quad (4.13)$$

и

$$\overline{\varepsilon}_n^*(t) := \overline{A}_n(t)\varepsilon^*(t) + \frac{\overline{D}_n(t)}{(1-t)^n} = O(t^{2n+1}), \quad t \rightarrow 0, \quad (4.14)$$

и, наконец,

$$\overline{\lambda}_n(t) := -\overline{A}_n(t)\lambda(t) + \left(\frac{\overline{F}_n(t)}{t^n} - \frac{\overline{D}_n(t)}{(1-t)^n} \right) = O((t-1/2)^{2n+1}), \quad t \rightarrow 1/2. \quad (4.15)$$

Задача 3 представляет собой систему

$$(2n+1) + 2(2n+1) + (2n+1) = 8n+4$$

линейных однородных уравнений относительно

$$(2n+1) + 2(3n+1) = 8n+3$$

неизвестных коэффициентов многочленов $\overline{A}_n, \overline{D}_n, \overline{F}_n$.

Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Справедливо интегральное представление

$$\frac{\tilde{\omega}_n(x)}{x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}} = \int_1^{+\infty} \frac{\tilde{\varepsilon}_n(t)}{(x(1-x)-t(1-t))} \frac{(2t-1)dt}{t^{2n+1}(1-t)^{2n+1}}, \quad (4.16)$$

где функция $\tilde{\varepsilon}_n(t)$ определяется формулой Родрига

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_n(t)}{t^{2n+1}(1-t)^{2n+1}} = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2t-1} \frac{d}{dt} \right)^n \frac{\overline{\varepsilon}_n(t)}{t^{n+1}(1-t)^{n+1}}. \quad (4.17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Такое же интегральное представление справедливо и на промежутке Δ_- с весовой функцией $\tilde{\varepsilon}_n^*(t)$, которая определяется аналогичной формулой Родрига.

Интегрируя по частям, получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Справедливо интегральное представление

$$\frac{\tilde{\omega}_n(x)}{x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}} = \int_1^{+\infty} \frac{\overline{\varepsilon}_n(t)}{(x(1-x)-t(1-t))^{n+1}} \frac{(2t-1)dt}{t^{n+1}(1-t)^{n+1}}. \quad (4.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Из условий задачи 2 и формул (2.6) вытекают интегральное представление

$$\frac{\tilde{\omega}_n(x)}{x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}} = \int_{-\infty}^0 \frac{\tilde{\varepsilon}_n^*(t)}{x-t} \frac{dt}{t^{2n+1}(1-t)^{2n+1}} + \int_1^{+\infty} \frac{\tilde{\varepsilon}_n(t)}{t-x} \frac{dt}{t^{2n+1}(1-t)^{2n+1}} \quad (4.19)$$

и следующие соотношения ортогональности:

$$\int_{-\infty}^0 \tilde{\varepsilon}_n^*(t) t^m \frac{dt}{t^{2n+1}(1-t)^{2n+1}} - \int_1^{+\infty} \tilde{\varepsilon}_n(t) t^m \frac{dt}{t^{2n+1}(1-t)^{2n+1}} = 0, \quad (4.20)$$

где $m = 0, \dots, 2n$. Воспользуемся четностью функции $\tilde{\omega}_n(x)$. Тогда (4.19) сводится к (4.16), а соотношения (4.20) будут равносильны следующим соотношениям ортогональности:

$$\int_1^{+\infty} \tilde{\varepsilon}_n(t) (2t-1)^{2m+1} \frac{dt}{t^{2n+1}(1-t)^{2n+1}} = 0, \quad m = 0, \dots, n-1. \quad (4.21)$$

Определим функцию $\tilde{\varepsilon}_n(t)$ формулой Родрига (4.17). Тогда из того, что многочлен $\bar{A}_n$ четный, и из условий (4.15) следует, что функция $\tilde{\varepsilon}_n(t)$ имеет вид (4.3) (не содержит $(2t-1)$ в знаменателе). Аналогичные утверждения справедливы и для функции $\tilde{\varepsilon}_n^*(t)$. Далее, из (4.13), (4.14) следуют, во-первых, соотношения (4.3), (4.5) и, во-вторых, возможность интегрированием по частям доказать соотношения ортогональности (4.21). И, наконец, из (4.12) следует (4.2).

Предложение 2 доказано.

4.4. Совместные двухточечные аппроксимации Паде. Рассмотрим следующую задачу.

ЗАДАЧА 4. Для данного целого неотрицательного числа n требуется найти нетривиальный набор многочленов $\hat{A}_n$, $\hat{D}_n$ и $\hat{F}_n$, степени не выше $2n$, такой, что выполняются следующие интерполяционные условия:

$$\hat{\varepsilon}_n(t) := \hat{A}_n(t)\varepsilon(t) + \hat{F}_n(t) = O((1-t)^{3n+1}), \quad t \rightarrow 1, \quad (4.22)$$

и

$$\hat{\varepsilon}_n^*(t) := \hat{A}_n(t)\varepsilon^*(t) + \hat{D}_n(t) = O(t^{3n+1}), \quad t \rightarrow 0. \quad (4.23)$$

Задача 4 представляет собой систему $2(3n+1) = 6n+2$ линейных однородных уравнений относительно $3(2n+1) = 6n+3$ неизвестных коэффициентов многочленов $\hat{A}_n$, $\hat{D}_n$ и $\hat{F}_n$. Это – стандартная многоточечная (двухточечная) задача о совместных аппроксимациях Эрмита–Паде второго типа (с общим знаменателем).

Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Имеет место следующая формула:

$$\frac{\bar{\varepsilon}_n(t)}{(2t-1)^{2n+1}} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2n-1)!!} \left(\frac{1}{2t-1} \frac{d}{dt} \right)^n \frac{\hat{\varepsilon}_n(t)}{2t-1}. \quad (4.24)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичная формула имеет место и для функции $\bar{\varepsilon}_n^*(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.22) и (4.23) следуют (4.13) и (4.14) соответственно. Далее, рассмотрим функцию

$$\widehat{e}_n(t) := -\widehat{A}_n(t)e(t) + \begin{cases} -\widehat{D}_n(t) \\ \widehat{F}_n(t) \end{cases}.$$

Тогда

$$\frac{\widetilde{e}_n(t)}{(2t-1)^{2n+1}} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2n-1)!!} \left(\frac{1}{2t-1} \frac{d}{dt} \right)^n \frac{\widehat{e}_n(t)}{2t-1}. \quad (4.25)$$

Поскольку

$$\widehat{e}_n(t) = O(t^{2n}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.26)$$

и эта функция нечетная, то из (4.25), (4.26) следует (4.12).

Рассмотрим функцию

$$\widehat{\lambda}_n(t) := \widehat{\varepsilon}_n^*(t) - \widehat{e}_n(t).$$

Тогда

$$\frac{\widetilde{\lambda}_n(t)}{(2t-1)^{2n+1}} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2n-1)!!} \left(\frac{1}{2t-1} \frac{d}{dt} \right)^n \frac{\widehat{\lambda}_n(t)}{2t-1}. \quad (4.27)$$

Поскольку функция $\widehat{\lambda}_n(t)/(2t-1)$ — голоморфная в точке $t = 1/2$ и четная, то функция $\widetilde{\lambda}_n(t)/(2t-1)^{2n+1}$, определенная формулой (4.27), также будет голоморфной в точке $t = 1/2$. А это и означает, что выполняется условие (4.15).

Предложение 3 доказано.

4.5. Формула Родрига для двухточечных аппроксимаций Паде. Перейдем к решению задачи 4. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

ЗАДАЧА 5. Для данного целого неотрицательного числа n требуется найти нетривиальный набор многочленов $D_n^\#$ и $F_n^\#$, степени не выше n , такой, что многочлен

$$(1-t)^{3n+1}F_n^\#(t) - t^{3n+1}D_n^\#(t)$$

имеет степень не выше $2n$.

Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Имеет место следующее интегральное представление:

$$\widehat{e}_n(t) = \int_1^t \frac{(t-s)^{2n}(1-s)^n F_n^\#(s)}{s^{2n+1}} ds. \quad (4.28)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичное интегральное представление имеет место и для функции $\widehat{\varepsilon}_n^*(t)$.

Доказательство. Продифференцируем соотношения (4.22) и (4.23) $2n + 1$ раз:

$$\varepsilon_n^\#(t) := \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{d}{dt} \right)^{2n+1} \widehat{\varepsilon}_n(t) \quad (4.29)$$

и

$$\varepsilon_n^{*\#}(t) := \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{d}{dt} \right)^{2n+1} \widehat{\varepsilon}_n^*(t).$$

Тогда

$$\varepsilon_n^\#(t) = \frac{(1-t)^n F_n^\#(t)}{t^{2n+1}}$$

и

$$\varepsilon_n^{*\#}(t) = \frac{t^n D_n^\#(t)}{(1-t)^{2n+1}},$$

где $D_n^\#$ и $F_n^\#$ – некоторые многочлены степени не выше n . Из (4.26) следует, что

$$\varepsilon_n^\#(t) - \varepsilon_n^{*\#}(t) = O(1/t^{2n+2}), \quad t \rightarrow \infty,$$

или, что то же самое,

$$(1-t)^{3n+1} F_n^\#(t) - t^{3n+1} D_n^\#(t) = O(t^{2n}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.30)$$

Таким образом, мы пришли к условию задачи 5. Далее, обращая дифференциальный оператор (4.29) по формуле Дирихле, получим

$$\widehat{\varepsilon}_n(t) = \int_1^t (t-s)^{2n} \varepsilon_n^\#(s) ds, \quad (4.31)$$

что совпадает с (4.28).

Предложение 4 доказано.

4.6. Интегральное представление двухточечных аппроксимаций Паде.

Решим задачу 5. Справедливо

Предложение 5. *Имеет место следующее интегральное представление*

$$(1-s)^{3n+1} F_n^\#(s) = \int_1^s (s-r)^{2n} (1-r)^n r^n dr. \quad (4.32)$$

Доказательство. Продифференцируем равенство (4.30) $2n + 1$ раз:

$$\frac{1}{(2n)!} \left(\frac{d}{ds} \right)^{2n+1} ((1-s)^{3n+1} F_n^\#(s) - s^{3n+1} D_n^\#(s)) = (1-s)^n F_n^\flat(s) - s^n D_n^\flat(s) \equiv 0, \quad (4.33)$$

где $D_n^\flat$ и $F_n^\flat$ – некоторые многочлены степени не выше n . Но из (4.33) следует, что (с точностью до нормировки)

$$\begin{cases} F_n^\flat(s) = s^n, \\ D_n^\flat(s) = (1-s)^n. \end{cases}$$

Обращая дифференциальный оператор по формуле Дирихле, получим (4.32).

Предложение 5 доказано.

4.7. Доказательство теоремы 1.

Завершим доказательство теоремы 1. Объединяя формулы (4.24) и (4.31), будем иметь

$$\bar{\varepsilon}_n(t) = (2t-1)^{2n+1} \frac{1}{2^n} \frac{1}{(2n-1)!!} \left(\frac{1}{2t-1} \frac{d}{dt} \right)^n \frac{1}{2t-1} \int_1^t (t-s)^{2n} \varepsilon_n^\#(s) ds.$$

Используя бином Ньютона, получим

$$\frac{1}{2^n} \frac{1}{(2n-1)!!} \left(\frac{1}{2t-1} \frac{d}{dt} \right)^n \frac{(t-s)^{2n}}{2t-1} = \frac{(s(1-s) - t(1-t))^n}{(2t-1)^{2n+1}}.$$

Тогда

$$\bar{\varepsilon}_n(t) = \int_1^t (s(1-s) - t(1-t))^n \varepsilon_n^\#(s) ds. \quad (4.34)$$

Объединяя формулы (4.9), (4.18), (4.32) и (4.34), получим интегральное представление (4.1).

Теорема 1 доказана.

4.8. Возвратные многочлены Лежандра. В заключение этого раздела сделаем одно замечание об альтернативном решении задачи 4. После замены переменной

$$z = 1 - \frac{1}{x}$$

задача 4 перейдет в следующую равносильную ей задачу.

ЗАДАЧА 6. Для данного целого неотрицательного числа n требуется найти не равный тождественно нулю многочлен $Q_n(z)$, степени не выше $2n$, а также многочлен $P_n^*(z)$, степени не выше $2n$, и многочлен $P_n(z)$ такие, что выполняются следующие интерполяционные условия:

$$\begin{aligned} R_n(z) &:= Q_n(z)e(z) - P_n(z) = O(1/z^{n+1}), & z \rightarrow \infty, \\ R_n^*(z) &:= Q_n(z)\varepsilon^*(z) - P_n^*(z) = O(z^{3n+1}), & z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Решения задач 4 и 6 связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} \hat{A}_n(x) &= \kappa_n x^{2n} Q_n(1-1/x), \\ \hat{\varepsilon}_n^*(x) &= -\kappa_n x^{2n} R_n(1-1/x), \\ \hat{\varepsilon}_n(x) &= -\kappa_n x^{2n} R_n^*(1-1/x), \end{aligned}$$

где κ_n — нормировочный коэффициент.

Решение задачи 6 сводится к нахождению ненулевого многочлена Q_n , степени не выше $2n$, который единственным образом (с точностью до нормировки) определяется следующими двумя условиями:

- (1) многочлен Q_n возвратный, т.е.

$$Q_n(z) = z^{2n} Q_n(1/z),$$

- (2) многочлен Q_n удовлетворяет тем же соотношениям ортогональности, что и многочлен Лежандра, а именно,

$$\int_0^1 Q_n(\xi) \xi^m d\xi = 0, \quad m = 0, \dots, n-1.$$

Легко видеть, что

$$Q_n(z) = Q_n(z, 1),$$

где $Q_n(p, q)$ – однородный многочлен степени $2n$ от двух переменных, который может быть определен формулой Родрига:

$$Q_n(p, q) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} p^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial q^n} q^n (p - q)^{2n}.$$

Ранее задача 6 подробно изучалась нами в работе [45].

5. Риманова поверхность и асимптотика

5.1. Риманова поверхность и мероморфная функция Φ , порожденные циклическим графом. В этом разделе мы будем изучать асимптотическое поведение решений задачи 1.

Обозначим $\mathfrak{R}$ четырехлистную риманову поверхность, которая строится следующим образом. Листы обозначим

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}, \mathfrak{R}_{\omega}, \mathfrak{R}_{+}, \mathfrak{R}_{-}.$$

Лист $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$ – это (расширенная) комплексная плоскость с разрезом $[-z_*, +z_*]$, где $z_* = 5/(3\sqrt{3})$. Лист $\mathfrak{R}_{\omega}$ – это плоскость с разрезами

$$[-\infty, -1] \cup [-z_*, +z_*] \cup [+1, +\infty].$$

Лист $\mathfrak{R}_{+}$ – это плоскость с разрезом $[+1, +\infty]$, а $\mathfrak{R}_{-}$ – с разрезом $[-\infty, -1]$. Листы склеиваются по соответствующим разрезам. Поверхность $\mathfrak{R}$ имеет род нуль.

Обозначим Φ функцию, мероморфную на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ и имеющую следующий дивизор. Функция Φ имеет в точке $z = \infty$ на листе $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$ нуль 2-го порядка, в точке $z = +1$ на листах $\mathfrak{R}_{\omega}$ и $\mathfrak{R}_{+}$ и в точке $z = -1$ на листах $\mathfrak{R}_{\omega}$ и $\mathfrak{R}_{-}$ – также нули 2-го порядка. В точке $z = \infty$ на листах $\mathfrak{R}_{\omega}$, $\mathfrak{R}_{+}$, $\mathfrak{R}_{-}$ функция Φ имеет полюс 6-го порядка. Других нулей и полюсов функция Φ не имеет. Такая функция существует и единственна (если потребовать какое-либо условие нормировки). Пусть

$$\Phi(z) \sim z^2, \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in \mathfrak{R}_j \quad (j = \omega, +, -).$$

Обозначим Φ_j ветвь функции Φ на листе $\mathfrak{R}_j$.

5.2. Асимптотическое поведение аппроксимаций Эрмита–Паде. Сделаем замену переменной и перенормируем решение задачи 1:

$$\dot{\mathcal{A}}_n(z) = 4^n \mathcal{A}_n\left(\frac{1+z}{2}\right).$$

Аналогичным образом определяются величины

$$\dot{\omega}_n, \dot{\varepsilon}_n, \dot{\varepsilon}_n^*, \dot{A}_n.$$

Одним из основных результатов работы является

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы следующие утверждения.*

- 1) *Равномерно на компактах в области $\mathbb{C} \setminus [-z_*, +z_*]$ имеем*

$$|\dot{\mathcal{A}}_n|^{1/n} \Rightarrow |\Phi_{\mathcal{A}}|.$$

- 2) (a) *Равномерно на компактах в области*

$$\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [-z_*, +z_*] \cup [+1, +\infty))$$

имеем

$$|\dot{\omega}_n|^{1/n} \Rightarrow |\Phi_{\omega}|.$$

- (b) *Отрезок $[-z_*, +z_*]$ служит предельным множеством нулей функций $\dot{\omega}_n$.*

- 3) (a) *Равномерно на компактах в области $\mathbb{C} \setminus [+1, +\infty)$ имеем*

$$|\dot{\varepsilon}_n|^{1/n} \Rightarrow |\Phi_+|.$$

- (b) *Равномерно на компактах в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ имеем*

$$|\dot{\varepsilon}_n^*|^{1/n} \Rightarrow |\Phi_-|.$$

- (c) (i) *Предельное множество нулей функций $\dot{\varepsilon}_n$ состоит из промежутка $[+1, +\infty)$.*

- (ii) *Предельное множество нулей функций $\dot{\varepsilon}_n^*$ состоит из промежутка $(-\infty, -1]$.*

- 4) (a) *Равномерно на компактах в правой полуплоскости имеем*

$$|\dot{A}_n|^{1/n} \Rightarrow |\Phi_-|.$$

- (b) *Равномерно на компактах в левой полуплоскости имеем*

$$|\dot{A}_n|^{1/n} \Rightarrow |\Phi_+|.$$

- (c) *Мнимая ось служит предельным множеством нулей многочленов $\dot{A}_n$.*

Следующие пункты посвящены доказательству теоремы 2.

5.3. Многомерный метод перевала. Сделаем в интегральном представлении

(4.1) замену переменных $x \mapsto \frac{1+x}{2}$ и т. д. Получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{A}}_n(z) = & \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{3n+1} dx}{(z-x)^{2n+1}} \int_{+1}^{+\infty} \frac{1}{(t^2-x^2)^{n+1}} \frac{2t dt}{(1-t^2)^{n+1}} \\ & \cdot \int_1^t \frac{(t^2-s^2)^n ds}{(1-s^2)^{2n+1}} \int_1^s (s-r)^{2n} (1-r^2)^n dr. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Рассмотрим следующую рациональную функцию, зависящую от четырех комплексных переменных x, t, s, r и одного комплексного параметра z :

$$\Phi(x, t, s, r|z) = \frac{(1-x^2)^3}{(z-x)^2} \frac{1}{(t^2-x^2)} \frac{1}{(1-t^2)} \frac{(t^2-s^2)}{(1-s^2)^2} (s-r)^2 (1-r^2). \quad (5.2)$$

Вопрос об асимптотике интеграла (5.1) сводится к исследованию критических точек функции Φ . Напишем систему уравнений, определяющих эти критические точки:

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \Phi = -\frac{6x}{1-x^2} + \frac{2}{z-x} + \frac{2x}{t^2-x^2} = 0, \quad (5.3a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \Phi = -\frac{2t}{t^2-x^2} + \frac{2t}{1-t^2} + \frac{2t}{t^2-s^2} = 0, \quad (5.3b)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \ln \Phi = -\frac{2s}{t^2-s^2} + \frac{4s}{1-s^2} + \frac{2}{s-r} = 0, \quad (5.3c)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \ln \Phi = -\frac{2}{s-r} - \frac{2r}{1-r^2} = 0. \quad (5.3d)$$

Отбор критических точек, дающих вклад в асимптотику интеграла (5.1), легко осуществляется в окрестности бесконечности, далее применяется аналитическое продолжение. Для изучения асимптотического поведения других величин, а именно: $\dot{\omega}_n$, $\dot{\varepsilon}_n$, $\dot{\varepsilon}_n^*$ и $\dot{A}_n$, применяются соответствующие интегральные представления и формулы Родрига, полученные в разделе 4. Все эти формулы также приводят к изучению критических точек функции (5.2).

5.4. Алгебраическое уравнение для критических точек. Последовательно решая уравнения (5.3) (снизу вверх), получим

$$s = \frac{2r^2 - 1}{r}, \quad (5.4a)$$

$$t^2 = (2p - 1)(4p - 3), \quad (5.4b)$$

$$x^2 = (2p - 1)^2(5 - 4p), \quad (5.4c)$$

$$z^2 = \frac{(4p^2 - 6p + 1)^2}{5 - 4p}, \quad (5.4d)$$

где обозначено $p = r^2$. Обозначим $\Phi(z)$ критические значения функции $\Phi(\cdot | z)$. Тогда из (5.2) и (5.4) следует, что

$$\Phi = (1 - p)^2(5 - 4p). \quad (5.5)$$

Таким образом, как p , так и Φ суть четырехзначные алгебраические функции с одной и той же римановой поверхностью.

5.5. Исследование алгебраического уравнения. Вначале рассмотрим алгебраическую функцию $p(\mathfrak{z})$, удовлетворяющую уравнению

$$\mathfrak{z} = \frac{(4p^2 - 6p + 1)^2}{5 - 4p}. \quad (5.6)$$

Исследуем ее точки ветвления.

Если $\mathfrak{z} = 1$, то уравнение (5.6) имеет следующие корни: $p = 1$ – корень кратности 2 (ветвление 2-го порядка) и два простых корня $p = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$ (голоморфные ветви).

Если $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_* := 25/27$, то $p = 7/6$ – корень кратности 2 (ветвление 2-го порядка) и $p = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{6}$ – простые корни (голоморфные ветви).

Если $\mathfrak{z} = \infty$, то $p = 5/4$ – простой корень (голоморфная ветвь) и $p \sim (-\mathfrak{z}/4)^{1/3}$ (ветвление 3-го порядка).

Если $\mathfrak{z} = 0$, то $p = p_{\pm} := \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$ – корни кратности 2 (ветвления 2-го порядка).

Риманову поверхность $\mathfrak{R}$ алгебраической функции $p(\mathfrak{z})$ можно построить следующим образом. На листе $\mathfrak{R}_1$ проведем разрез $[-\infty, 0]$, на листе $\mathfrak{R}_2$ – разрезы $[-\infty, 0]$ и $[+1, +\infty]$, на листе $\mathfrak{R}_3$ – разрезы $[+1, +\infty]$ и $[0, \mathfrak{z}_*]$, на листе $\mathfrak{R}_4$ – разрез $[0, \mathfrak{z}_*]$. Склеим листы по соответствующим разрезам.

В каждой из областей $\mathfrak{R}_j$ выделяется однозначная ветвь p_j многозначной функции p . Функция p_j конформно отображает область $\mathfrak{R}_j$ на некоторую область Π_j . Эти области попарно не пересекаются.

Определив функцию $\Phi(z)$ формулой (5.5), где $p = p(z^2)$, получим алгебраическую функцию, нули, полюсы и риманову поверхность которой были описаны в п. 5.1.

Теорема 2 доказана.

5.6. Поведение функции Φ в ее нулях, полюсах и точках ветвления.

Уточним поведение функции $\Phi(z)$ во всех ее нулях, полюсах и точках ветвления. Из уравнений (5.5), (5.6) легко получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. (1) Если $z \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathscr{A}}(z) &\sim \frac{1}{256} \frac{1}{z^2}, \\ \Phi_j(z) &\sim z^2, \quad j = \omega, +, -.\end{aligned}$$

(2) Если $z \rightarrow 1$, то

$$\begin{aligned}\Phi_j(z) &\sim \frac{1-z}{2}, \quad j = \omega, +, \\ \Phi_{\mathscr{A}}(z) &\rightarrow \frac{(1-\sqrt{2})^4}{4}, \\ \Phi_{-}(z) &\rightarrow \frac{(1+\sqrt{2})^4}{4}.\end{aligned}$$

(3) Если $z \rightarrow -1$, то

$$\begin{aligned}\Phi_j(z) &\sim \frac{1+z}{2}, \quad j = \omega, -, \\ \Phi_{\mathscr{A}}(z) &\rightarrow \frac{(1-\sqrt{2})^4}{4}, \\ \Phi_{+}(z) &\rightarrow \frac{(1+\sqrt{2})^4}{4}.\end{aligned}$$

(4) Имеем

$$\begin{aligned}\Phi_j(\pm z_*) &= \frac{1}{108}, \quad j = \mathscr{A}, \omega, \\ \Phi_{\pm}(z_*) &= \Phi_{\mp}(-z_*) = \frac{223 \mp 70\sqrt{10}}{54}.\end{aligned}$$

Исключая переменную p из уравнений (5.5) и (5.6), получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Функция Φ удовлетворяет следующему алгебраическому уравнению:

$$Y^4 + (12q - 34)Y^3 + (48q^2 + 70q + 1)Y^2 + (64q^3 - 40q^2 - 2q)Y + q^2 = 0, \quad (5.7)$$

где

$$q = 1 - z^2, \quad Y = 4\Phi.$$

5.7. Задача равновесия логарифмического потенциала. Проинтерпретируем утверждения теоремы 2 в терминах задачи равновесия теории логарифмического потенциала.

Обозначим λ_* – предельное распределение нулей многочленов $\dot{A}_n$, т.е.

$$\lambda_* := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{2n} \delta_{z_{n,j}},$$

где предел понимается в смысле слабой сходимости мер, δ_a – единичная мера, сосредоточенная в точке a , а $\{z_{n,j}\}_{j=1}^{2n}$ – все нули многочлена $\dot{A}_n$. Тогда λ_* – положительная борелевская мера такая, что

$$\text{supp } \lambda_* = i\mathbb{R}, \quad \|\lambda_*\| = 2.$$

Для логарифмического потенциала этой меры

$$V^{\lambda_*}(z) := \int \ln \frac{1}{|z - t|} d\lambda_*(t)$$

имеем следующую формулу:

$$V^{\lambda_*}(z) = \begin{cases} -\ln |\Phi_+(z)|, & \text{если } \text{Re } z \leq 0, \\ -\ln |\Phi_-(z)|, & \text{если } \text{Re } z \geq 0. \end{cases}$$

По формулам Сохоцкого для функции распределения меры λ_* получим следующий результат:

$$\lambda_*(iy) = -\frac{1}{\pi} \text{Arg } \Phi_+(iy) = \frac{1}{\pi} \text{Arg } \Phi_-(iy), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Обозначим λ_+ и λ_- предельные распределения (отличных от ± 1) нулей функций $\dot{\varepsilon}_n$ и $\dot{\varepsilon}_n^*$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \text{supp } \lambda_+ &= [+1, +\infty), \quad \|\lambda_+\| = 1, \\ \text{supp } \lambda_- &= (-\infty, -1], \quad \|\lambda_-\| = 1. \end{aligned}$$

Справедливы формулы

$$\begin{aligned} V^{\lambda_+}(z) &= -\ln |\Phi_+(z)| + \ln |1 - z|, \quad z \in \mathbb{C}, \\ V^{\lambda_-}(z) &= -\ln |\Phi_-(z)| + \ln |1 + z|, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

По формулам Сохоцкого

$$\begin{aligned}\lambda_+(x) &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Arg} \Phi_+(x + i \cdot 0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arg} \Phi_\omega(x + i \cdot 0), \quad 1 < x < +\infty, \\ \lambda_-(x) &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Arg} \Phi_-(x + i \cdot 0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arg} \Phi_\omega(x + i \cdot 0), \quad -\infty < x < -1.\end{aligned}$$

Следовательно, мера λ_* — это выметание меры $(\lambda_+ + \delta_1)$ на мнимую ось (границу правой полуплоскости), и в то же время — выметание меры $(\lambda_- + \delta_{-1})$ на мнимую ось (границу левой полуплоскости).

Обозначим λ_0 предельное распределение нулей функций ω_n . Тогда

$$\operatorname{supp} \lambda_0 = [-z_*, +z_*], \quad \|\lambda_0\| = 2.$$

Справедливы формулы

$$V^{\lambda_0}(z) = \ln |\Phi_{\mathcal{A}}(z)| + 8 \ln 2, \quad z \in \mathbb{C},$$

и

$$\ln |\Phi_\omega(z)| = \ln |1 - z| + \ln |1 + z| - V^{\lambda_0}(z) + V^{\lambda_+}(z) + V^{\lambda_-}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

По формулам Сохоцкого получим

$$\lambda_0(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arg} \Phi_{\mathcal{A}}(x + i \cdot 0) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Arg} \Phi_\omega(x + i \cdot 0), \quad -z_* < x < +z_*.$$

Итак, мы определили четыре меры: λ_* , $\lambda_\pm$ и λ_0 . Из правила склейки листов римановой поверхности $\mathfrak{R}$ вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Выполняются следующие условия равновесия:*

$$\begin{aligned}2V^{\lambda_0} + V^{\delta_1} + V^{\delta_{-1}} - V^{\lambda_+} - V^{\lambda_-} &\equiv 8 \ln 2 \quad \text{на} \quad [-z_*, +z_*], \\ 2V^{\lambda_+} + V^{\lambda_-} - V^{\lambda_0} - V^{\delta_{-1}} &\equiv 0 \quad \text{на} \quad [+1, +\infty), \\ 2V^{\lambda_-} + V^{\lambda_+} - V^{\lambda_0} - V^{\delta_1} &\equiv 0 \quad \text{на} \quad (-\infty, -1], \\ 2V^{\lambda_*} - V^{\lambda_+} - V^{\lambda_-} - V^{\delta_1} - V^{\delta_{-1}} &\equiv 0 \quad \text{на} \quad i\mathbb{R}.\end{aligned}$$

6. Рекуррентные соотношения и теорема Аперы

6.1. Общая схема оценки меры иррациональности. Цель последнего раздела работы состоит в установлении связи рассмотренной нами конструкции с результатом Аперы.

Вначале напомним общую схему доказательства иррациональности некоторого действительного числа θ . Пусть мы имеем приближения этого числа

$$r_n = q_n \theta - p_n$$

(где q_n — натуральные, p_n — целые), обладающие двумя свойствами:

- 1) $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $r_n \neq 0$.

Такие приближения называются диофантовыми. Тогда очевидно, что число θ – иррациональное. Действительно, предположив противное, т.е. что $\theta = p/q$ ($q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$), получим число

$$qr_n = q_n p - p_n q, \quad (6.1)$$

которое стремится к нулю (при $n \rightarrow \infty$), но не равно нулю. Этого не может быть, поскольку число (6.1) целое.

Более того, имея верхние оценки для величин q_n и r_n , легко получить нижнюю оценку меры иррациональности числа θ . А именно, пусть

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} q_n^{1/n} &= \alpha \quad (\alpha > 1), \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} |r_n|^{1/n} &= \rho \quad (0 < \rho < 1). \end{aligned}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для любых $q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c(\varepsilon)}{q^{\mu+\varepsilon}}, \quad (6.2)$$

где $c(\varepsilon)$ – некоторая положительная постоянная (эффективно вычислимая, если такими являются верхние пределы α и ρ) и

$$\mu = \frac{\ln \frac{\alpha}{\rho}}{\ln \frac{1}{\rho}}. \quad (6.3)$$

Получается эта оценка следующим образом. Обозначим $r = q\theta - p$. Имеем тождество

$$rq_n = qr_n + (qp_n - pq_n).$$

Число $(qp_n - pq_n)$ – целое и отличное от нуля (по крайней мере для одного из любых двух последовательных значений n). Это следует из неравенства

$$p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} \neq 0,$$

которое предполагается доказанным. Тогда $|qp_n - pq_n| \geq 1$ и, следовательно,

$$|r|q_n \geq 1 - q|r_n|.$$

Откуда

$$|r|\alpha'^n \geq 1 - q\rho'^n$$

для всех достаточно больших n . Здесь α' и ρ' – любые числа такие, что $\alpha' > \alpha$, $\rho' < \rho$. Окончательно,

$$|r| \geq \left(\frac{1}{\alpha'} \right)^n - q \cdot \left(\frac{\rho'}{\alpha'} \right)^n.$$

Находя максимум правой части этого неравенства (как функции от n), приходим к формулам (6.2), (6.3).

6.2. Теорема Апери. В простой общей схеме доказательства иррациональности наибольшая трудность, безусловно, состоит в построении диофантовых приближений. Для числа $\theta = \zeta(3)$ такие приближения были построены Р. Апери [29]. Он рассмотрел трехчленное рекуррентное соотношение

$$(n+1)^3 u_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)u_n + n^3 u_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \quad (6.4)$$

и два его линейно независимых решения a_n и b_n , удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= 5, \\ b_0 &= 0, & b_1 &= 6. \end{aligned}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Числа a_n – целые.
- 2) Если

$$\omega_n = \text{LCM}\{1, 2, \dots, n\},$$

то числа $p_n = \omega_n^3 b_n$ – целые.

- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = (\sqrt{2} + 1)^4$.
- 4) Если $c_n = a_n \zeta(3) - b_n$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = (\sqrt{2} - 1)^4.$$

Из этих утверждений следует, что

$$r_n = q_n \zeta(3) - p_n$$

(где $q_n = \omega_n^3 a_n$) суть диофантовы приближения числа $\zeta(3)$. Действительно, согласно закону распределения простых чисел $\omega_n^{1/n} \rightarrow e$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n|^{1/n} = e^3 (\sqrt{2} - 1)^4 < 1.$$

Таким образом, $r_n \rightarrow 0$ и $r_n \neq 0$. Поэтому число $\zeta(3)$ иррациональное. По формулам (6.2), (6.3) получаем оценку меры иррациональности этого числа, а именно:

$$\left| \zeta(3) - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^\mu},$$

где $\mu = 13.4178202 \dots$. В дальнейшем в ряде работ, варьируя формулы Апери, удалось улучшить эту оценку (см., например, работы М. Хаты [46], [47]).

Утверждения 1) и 2) нетривиальны. Они вытекают из предъявленных Апери в явном виде выражений для чисел a_n и b_n . Утверждения 3) и 4) доказываются следующим образом. Выражение (6.4) (после деления на $(n+1)^3$) представляет собой рекуррентное соотношение с предельно постоянными коэффициентами. При $n \rightarrow \infty$ получим соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 34\lambda + 1 = 0,$$

корни которого равны $(\sqrt{2} \pm 1)^4$. Откуда немедленно вытекает утверждение 3). Для доказательства утверждения 4) необходимо установить, что $c_n \rightarrow 0$. Аперри доказывает этот факт, используя представление числа $\zeta(3)$ в виде суммы следующего ряда:

$$\zeta(3) = \frac{5}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^3 \binom{2m}{m}}. \quad (6.5)$$

Такие формулы для чисел $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$ впервые были доказаны А. А. Марковым [48]–[50]. В письме к А. А. Маркову от 11 декабря 1889 г. Ш. Эрмит [51] высказывает свое восхищение этим результатом. Интересно отметить, что впоследствии, по-видимому, имея в виду этот результат, Ш. Эрмит предлагал А. А. Маркову объединить усилия для доказательства иррациональности некоторых классических констант.

Результат Аперри вызвал большой интерес к доказательству формул такого типа для других значений дзета-функции. При этом часто формулу (6.5) называют формулой Аперри и отмечают, что она лежит в основе его результата. Но фактически Аперри сделал гораздо больше – построил диофантовы приближения числа $\zeta(3)$. И хотя формула (6.5) существенно используется в его доказательстве, иррациональность из нее автоматически не вытекает.

6.3. Рекуррентное соотношение для циклического графа. В разделе 4 мы построили функции $\mathcal{A}_n(x)$ и, в частности, входящие в их определение многочлены $A_n(x)$. Заметим, что числа $A_n(1)$ рациональные, но не целые. Имея в виду арифметические приложения, сделаем перенормировку, а именно положим

$$\overset{\circ}{\mathcal{A}}_n(x) = \frac{(4n+1)!}{(2n)!(2n)!} \mathcal{A}_n(x)$$

(аналогичный смысл имеют обозначения $\overset{\circ}{A}_n(x)$ и т. д.). Такая нормировка получится, если старший коэффициент многочлена $\hat{A}_n(x)$ (см. п. 4.5) положить равным единице. В качестве приближения числа $\zeta(3)$ возьмем величины

$$\frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathcal{A}}_n(1) = \overset{\circ}{A}_n(1) \zeta(3) - b_n. \quad (6.6)$$

Оказывается, что это в точности приближения Аперри. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что величины (6.6) удовлетворяют рекуррентному соотношению (6.4) (начальные условия проверяются непосредственно). Безусловно, интересно также найти рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют многочлены $\overset{\circ}{A}_n(x)$. Учитывая симметрию нашей конструкции относительно преобразования $x \mapsto 1-x$, введем новую переменную $q = 4x(1-x)$. Пусть $y_n = y_n(q)$ – любая из последовательностей $\overset{\circ}{\mathcal{A}}_n, \overset{\circ}{\omega}_n, \overset{\circ}{\varepsilon}_n, \overset{\circ}{\varepsilon}_n^*, \overset{\circ}{A}_n$. Тогда, используя программы символьных вычислений, мы считаем на компьютере таблицу многочленов $\overset{\circ}{A}_n$ по формулам Родрига, полученным нами в разделе 4. Затем, записывая искомые рекуррентные соотношения с неопределенными коэффициентами и решая возникающие при этом системы линейных уравнений, мы получаем, что

1) Величины y_n удовлетворяют рекуррентному соотношению вида

$$qI_n^{(1)}(q)y_{n+2} + I_n^{(2)}(q)y_{n+1} + I_n^{(3)}(q)y_n + I_n^{(4)}(q)y_{n-1} + qI_n^{(5)}(q)y_{n-2} + q^2I_n^{(6)}(q)y_{n-3} = 0, \quad (6.7)$$

где $I_n^{(k)}(q)$ – многочлены от q , коэффициенты которых также являются многочленами от n . Степени этих многочленов (по переменной q) следующие:

$$\begin{aligned} \deg I_n^{(1)} &= 7, & \deg I_n^{(4)} &= 11, \\ \deg I_n^{(2)} &= 9, & \deg I_n^{(5)} &= 9, \\ \deg I_n^{(3)} &= 10, & \deg I_n^{(6)} &= 7. \end{aligned}$$

2) Рекуррентному соотношению (6.7) с предельно постоянными коэффициентами при $n \rightarrow \infty$ соответствует характеристическое уравнение (5.7).

3) При $q = 0$ формула (6.7) совпадает с рекуррентным соотношением Апери (6.4).

Используя методы компьютерной алгебры и применяя символьное интегрирование по частям в интегральном представлении (4.1), можно написать программы, которые не только вычисляют, но и доказывают предъявленные выше рекуррентные соотношения.

Я надеюсь, что аппроксимации Эрмита–Паде, связанные с циклическими графами, могут привести к новым арифметическим результатам.

В заключение выражаю благодарность А.И. Аптекареву за полезные замечания, направленные на улучшение рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов. О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа // Труды МИАН. 1981. Т. 157. С. 31–48.
- [2] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов. Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). № 1. С. 117–127.
- [3] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов. О задаче равновесия для векторных потенциалов // УМН. 1985. Т. 40. № 4. С. 155–156.
- [4] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов. Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций // Матем. сб. 1987. Т. 134 (176). № 3 (11). С. 306–352.
- [5] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин. Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 5. С. 33–58.
- [6] С. Hermite. Sur la fonction exponentielle // C. R. Acad. Sci. Paris. 1873. V. 77. P. 74–79, 226–233, 285–293.
- [7] K. Mahler. Perfect systems // Compositio Math. 1968. V. 19. P. 95–166.
- [8] K. Mahler. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. I, II // J. Reine Angew. Math. 1931–1932. V. 166. P. 118–136, 137–150.
- [9] K. Mahler. On the approximation of logarithms of algebraic numbers // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. 1953. V. 245. P. 371–398.
- [10] Е. М. Никишин. О совместных аппроксимациях Паде // Матем. сб. 1980. Т. 113 (155). № 4. С. 499–519.
- [11] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин. Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.
- [12] V. N. Sorokin, J. Van Iseghem. Algebraic aspects of matrix orthogonality for vector polynomials // J. Approx. Theory. 1997. V. 90. № 1. P. 97–116.

- [13] V. N. Sorokin, J. Van Iseghem. Matrix continued fractions // J. Approx. Theory. 1999. V. 96. №2. P. 237–257.
- [14] M. A. Angelesco. Sur l'approximation simultanée de plusieurs intégrales définies // C. R. Acad. Sci. Paris. 1918. V. 167. P. 629–631.
- [15] M. A. Angelesco. Sur deux extensions des fractions continues algébriques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1919. V. 168. P. 262.
- [16] Е. М. Никишин. О системе марковских функций // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1979. №4. С. 60–63.
- [17] В. А. Калягин. Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности // Матем. сб. 1979. Т. 110 (152). №4. С. 609–627.
- [18] А. И. Аптекарев. Асимптотика многочленов совместной ортогональности в случае Анжелеско // Матем. сб. 1988. Т. 136. №1. С. 56–84.
- [19] J. Nuttall. Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials // J. Approx. Theory. 1984. V. 42. №4. P. 299–386.
- [20] A. I. Aptekarev, H. Stahl. Asymptotics of Hermite–Padé polynomials // Progress in Approximation Theory / ed. A. A. Gonchar et al. New York: Springer-Verlag, 1992. P. 127–167. (Springer Ser. Comput. Math. V. 19.)
- [21] С. П. Суетин. О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций // Матем. сб. 2000. Т. 191. №9. С. 81–114.
- [22] Е. М. Никишин. Об асимптотике линейных форм для совместных аппроксимаций Паде // Изв. вузов. Матем. 1986. №2. С. 33–41.
- [23] K. Driver, H. Stahl. Simultaneous rational approximants to Nikishin systems // Acta Sci. Math. 1995. V. 60. №1–2. P. 245–263; V. 61. №1–4. P. 261–284.
- [24] В. Н. Сорокин. Аппроксимации Эрмита–Паде полилогарифмов // Изв. вузов. Матем. 1994. №5. С. 49–59.
- [25] А. И. Аптекарев. Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина // Матем. сб. 1999. Т. 190. №5. С. 3–44.
- [26] J. Bustamante. Asymptotics for Angelesco–Nikishin systems // J. Approx. Theory. 1996. V. 85. P. 43–68.
- [27] Ж. Бустаманте, Л. Г. Лагомасино. Аппроксимации Эрмита–Паде для систем Никишина аналитических функций // Матем. сб. 1992. Т. 183. №11. С. 117–138.
- [28] M. Hata. The irrationality of $\log(1 + 1/q) \log(1 - 1/q)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1998. V. 350. №6. P. 2311–2327.
- [29] R. Apéry. Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ // Astérisque. 1979. V. 61. P. 11–13.
- [30] A. van der Poorten. A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$: An informal report // Math. Intelligencer. 1979. V. 1. №4. P. 195–203.
- [31] H. Cohen. Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ (d'après R. Apéry) // Séminaire de Théorie des Nombres. Grenoble, 1978.
- [32] E. Reyssat. Irrationalité de $\zeta(3)$, selon Apéry // Séminaire de Théorie des Nombres. Delange–Pisot–Poitou, 1978/79. Fasc. 1, exp. 6, 1980.
- [33] T. Rivoal. La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2000. V. 331. №4. P. 267–270; math. NT/0008051.
- [34] В. В. Зудилин. Об иррациональности значений дзета-функции в нечетных точках // УМН. 2001. Т. 56. №2. С. 215–216.
- [35] F. Beukers. A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ // Bull. London Math. Soc. 1979. V. 11. P. 268–272.
- [36] F. Beukers. Padé approximations in number theory // Lecture Notes in Math. 1981. V. 888. P. 90–99.
- [37] В. Н. Сорокин. Аппроксимации Эрмита–Паде для систем Никишина и иррациональность $\zeta(3)$ // УМН. 1994. Т. 49. №2. С. 167–168.
- [38] В. Н. Сорокин. О теореме Апері // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1998. №3. С. 48–53.
- [39] Ю. В. Нестеренко. Некоторые замечания о $\zeta(3)$ // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №6. С. 865–880.
- [40] M. Prévost. A new proof of the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ using Padé approximants // J. Comput. Appl. Math. 1996. V. 67. №2. P. 219–235.

- [41] Л. А. Гутник. Об иррациональности некоторых величин, содержащих $\zeta(3)$ // Acta Arith. 1983. V. 42. № 3. P. 255–264.
- [42] В. Н. Сорокин. О линейной независимости логарифмов некоторых рациональных чисел // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 3. С. 74–79.
- [43] В. Н. Сорокин. О мере трансцендентности числа π^2 // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 87–120.
- [44] В. Н. Сорокин. О линейной независимости значений обобщенных полилогарифмов // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 8. С. 139–154.
- [45] В. Н. Сорокин. О совместных двухточечных аппроксимациях Паде марковских функций // Укр. матем. журн. 1991. Т. 43. № 4. С. 584–588.
- [46] M. Hata. On the linear independence of the values of polylogarithmic functions // J. Math. Pures Appl. 1990. V. 69. № 2. P. 133–173.
- [47] M. Hata. A new irrationality measure for $\zeta(3)$ // Acta Arith. 2000. V. 92. № 1. P. 47–57.
- [48] A. Markoff. Sur les séries $\sum \frac{1}{k^2}$, $\sum \frac{1}{k^3}$. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite // C. R. Acad. Sci. Paris. 1889. V. 100. P. 934–935.
- [49] А. А. Марков. Mémoire sur la transformation des séries peu convergentes en séries très convergentes // Mem. Acad. Sci. Petersburg. (7). 1890. V. 37. № 9. P. 1–18.
- [50] А. А. Марков. Исчисление конечных разностей. СПб., 1889–1890.
- [51] Н. Огигова. Les lettres de Ch. Hermite à A. Markoff, 1885–1899 // Rev. Hist. Sci. Appl. 1967. V. 20. P. 1–32.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: `vnsorrm@mech.math.msu.su`

Поступила в редакцию
15.03.2001