Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Коньков, Теоремы сравнения для эллиптических неравенств с нелинейностью в главной части, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 3, 141–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm513>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:34:02

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
НЕРАВЕНСТВ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

А. А. Коньков

Пусть Ω — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Через Q_r и S_r мы обозначаем, соответственно, шар $Q_r = \{x : |x| < r\}$ и сферу $S_r = \{x : |x| = r\}$ радиуса r с центром в точке нуля.

Всюду ниже предполагается, что $0 \leq R_0 < R \leq \infty$ и при этом $\Omega \cap S_\rho \neq \emptyset$ для всякого $\rho \in (R_0, R)$. Изучаются неравенства вида

$$\nabla A(x, u, \nabla u) \geq F(x, u) \quad \text{в } \Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}, \quad (1)$$

где $A : \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $F : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — каратеодориевы функции. Будем также предполагать выполненными следующие условия эллиптичности:

$$C_1 |\xi|^p \leq \xi A(x, t, \xi) \quad \text{и} \quad |A(x, t, \xi)| \leq C_2 |\xi|^{p-1}$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $t \in [0, \infty)$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $C_1, C_2 > 0$ и $p > 1$ — некоторые константы.

Неотрицательная функция $u \in W_{p, \text{loc}}^1(\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}) \cap L_{\infty, \text{loc}}(\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})$ называется решением неравенства (1), если

$$-\int_{\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}} A(x, u, \nabla u) \nabla \varphi \, dx \geq \int_{\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}} F(x, u) \varphi \, dx$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})$. Пишем

$$u|_{\partial \Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}} = 0, \quad (2)$$

если $\eta u \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ для любой функции $\eta \in C_0^\infty(Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})$. В случае $\partial \Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0} = \emptyset$ условие (2), очевидно, справедливо для всякой функции $u \in W_{p, \text{loc}}^1(\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})$.

Обозначим

$$M(r; u) = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega \cap S_r} u, \quad r \in (R_0, R).$$

Вопросы, рассматриваемые в этом сообщении, исследовались рядом авторов [1]–[3]. Мы приводим одно обобщение теоремы 1.1.1 работы [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00512).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a > p - 2$ и $\sigma > 1$ – некоторые вещественные числа, и пусть $f: [R_0, R) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – локально ограниченная измеримая функция, не убывающая по последнему аргументу и такая, что

$$f(r, t) \leq \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega \cap Q_{r\sigma} \setminus (Q_{r/\sigma} \cup Q_{R_0})} F(x, t) \quad \text{при } R_0 < r < R, \quad 0 < t,$$

и $f(r, t-0) = f(r, t)$ при $R_0 < r < R, 0 < t$. Тогда для любого неотрицательного решения задачи (1), (2), удовлетворяющего условиям

$$0 < M(R_0 + 0; u), \quad (3)$$

$$M(r_1; u) \leq M(r_2; u) \quad \text{при } R_0 < r_1 \leq r_2 < R, \quad (4)$$

найдутся постоянные $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, зависящие только от $n, p, a, \sigma, C_1, C_2$, такие, что на промежутке $[R_0, R)$ существует решение задачи Коши

$$\frac{1}{r^{1+a}} \frac{d}{dr} \left(r^{1+a} \left| \frac{dm}{dr} \right|^{p-2} \frac{dm}{dr} \right) = \alpha f(r, \beta m), \quad (5)$$

$$m(R_0) = M(R_0 + 0; u), \quad m'(R_0) = 0,$$

для которого при всех $r \in (R_0, R)$ справедлива оценка $M(r; u) \geq m(r) > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $n > p$, полагая в теореме 1 $a = n - 2$, имеем в левой части уравнения (5) радиальную компоненту оператора $\nabla(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда для любого неотрицательного решения задачи (1), (2), удовлетворяющего условиям (3) и (4), найдутся постоянные $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, зависящие только от $n, p, a, \sigma, C_1, C_2$, такие, что $\forall r \in (R_0, R)$

$$M(r; u) - M(R_0 + 0; u) \geq \int_{R_0}^r d\rho \left(\frac{\alpha}{\rho^{1+a}} \int_{R_0}^{\rho} \xi^{1+a} f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис // Матем. сб. 1988. Т. 135 (177). №3. С. 346–360.
 [2] А. А. Коньков // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. №2. С. 41–126. [3] Э. Митидиери, С. И. Похожаев. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Труды МИАН. 2001. Т. 234.

Московский государственный
 университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: konkov@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
 25.03.2002