Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. О. Чехов, Интегрируемые деформации систем на графах с петлями, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 3, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 05:21:34

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДЕФОРМАЦИИ СИСТЕМ НА ГРАФАХ С ПЕТЛЯМИ

Л. О. ЧЕХОВ

Изучение спектральных свойств и процессов рассеяния для операторов шредингеровского типа на бесконечных деревьях [1], [2] привело к обнаружению ряда неожиданных результатов, в том числе связи между матрицей рассеяния (S -матрицей) для бесконечного графа типа дерева с циклами и L -функцией Артина–Сельберга [3]. Тем не менее, не удалось найти никакой подходящей интегрируемой деформации операторов второго порядка, которая бы была аналогична соответствующей деформации для решеток $\mathbb{Z}((L, A)$ -пары типа цепочки Тоды) и $\mathbb{Z}_2((L, A, B)$ -тройки) (см. [4]).

Деформация произвольного симметрического оператора четвертого порядка L на графе T_3 (бесконечное однородное дерево с вершинами валентности три) в форме (L, A, B) -тройки, $\dot{L} = LA - BL$, была построена Кричевером и Новиковым [5]. Эта деформация сохраняет спектральные данные нулевого уровня энергии $L\psi = 0$. В работе [6] интегрируемые системы Кричевера–Новикова были обобщены на случай произвольного (неоднородного) графа типа дерева T .

Произвольный граф Γ с конечным числом циклов представим единственным (с точностью до изоморфизмов) образом как фактор универсального накрывающего дерева T относительно действия конечнопорожденной подгруппы Δ полной группы симметрий графа типа дерева T , $\Gamma = T/\Delta$. Рассматриваются операторы L , действующие на пространстве функций ψ_P , заданных в вершинах графа Γ . Расстояние $d(X_1, X_2) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ на древесном графе измеряется числом ребер, содержащихся в единственном пути, соединяющем вершины X_1 и X_2 . Порядком уравнения $L\psi = 0$, где $(L\psi)_P = \sum_X b_{P,X} \psi_X$, называется максимальный диаметр $\max_P d(X_1, X_2)$: $b_{P,X_1} \neq 0$, $b_{P,X_2} \neq 0$ или $b_{X_1,X_2} \neq 0$. В общем графе существует множество путей, соединяющих вершины X_1 и X_2 . В дальнейшем будет предполагаться, что теория рассматривается на накрывающем дереве T с наложенным условием периодичности всех функций ψ_X и коэффициентов операторов L , A , и B по отношению к действию подгруппы Δ группы симметрии. На факторизованном графе Γ это означает, что коэффициенты операторов ассоциированы с путями соответствующей длины, связывающими прообразы $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \in T$ соответствующих вершин $X_1, X_2 \in \Gamma$. Рассмотрим сначала произвольный граф без петель.

ТЕОРЕМА 1 [6]. *Вещественный самосопряженный оператор L четвертого порядка на графе T , не содержащем петель, допускает изоспектральную деформацию нулевого уровня энергии $L\psi = 0$, имеющую вид (L, A, B) -тройки $[B = A^t]$,*

$$\dot{L} = LA + A^t L, \quad (1)$$

где A есть оператор второго порядка, $(A\psi)_X = \sum_{X'}: d(X, X')=1 a_{X, X'} \psi_{X'} + s_X \psi_X$, тогда и только тогда, когда оператор L ,

$$(L\psi)_X = \sum_{X'': d(X, X'')=2} b_{X, X''} \psi_{X''} + \sum_{X': d(X, X')=1} r_{X, X'} \psi_{X'} + \rho_X \psi_X \quad (2)$$

(такой, что все $b_{X, X''} > 0$), может быть представлен в виде

$$L = Q^t Q + u_X, \quad (3)$$

где Q есть оператор второго порядка, $(Q\psi)_X = \sum_{X'}: d(X, X')=1 q_{X, X'} \psi_{X'} + v_X \psi_X$.

В случае, когда $b_{X, X''} \equiv b_{X'', X} > 0$, коэффициенты $q_{X, X'}$ однозначно определяются по коэффициентам $b_{X, X''}$, и наоборот. В частности, для любых трех вершин X_1, X_2, X_3 , таких, что $X_1 \neq X_3$ и $d(X_i, X_{i+1}) = 1$, $i = 1, 2$, $b_{X_1, X_3} = q_{X_1, X_2} q_{X_2, X_3}$. (Произвольный оператор

четвертого порядка L на дереве T_3 допускает представление (3), а потому и изоспектральную деформацию (1) [5].

Коэффициенты $a_{X,X'}$ оператора деформации A однозначно выражаются (с точностью до глобальной мультипликативной константы) через $q_{X,Y}$. Для произвольных трех вершин X_1, X_2, X_3 : $d(X_i, X_{i+1}) = 1, i = 1, 2$, получим¹

$$\frac{a_{X_2, X_1}}{q_{X_1, X_2}} = \frac{a_{X_2, X_3}}{q_{X_3, X_2}} \quad \text{и} \quad a_{X_3, X_2} = -a_{X_2, X_1} \frac{q_{X_2, X_3}^2}{q_{X_1, X_2} q_{X_3, X_2}} \quad (4)$$

(в частности, при $X_1 = X_3$ получим $a_{X_1, X_2} = -a_{X_2, X_1} q_{X_2, X_1}^2 / q_{X_1, X_2}^2$).

Обозначим через $\{X'_j\}$ и $\{X''_i\}$ множества вершин, соседних по отношению к соответствующим вершинам X_1 и X_2 и таких, которые не совпадают ни с X_1 , ни с X_2 . Явные формулы для деформации имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{b}_{X_1, X_3} &= r_{X_1, X_2} a_{X_2, X_3} + a_{X_2, X_1} r_{X_2, X_3} + b_{X_1, X_3} (s_{X_1} + s_{X_3}), \\ \dot{r}_{X_1, X_2} &= \sum_{X''} b_{X_1, X''} a_{X'', X_2} \\ &\quad + \sum_{X'} b_{X_2, X'} a_{X', X_1} + \rho_{X_1} a_{X_1, X_2} + \rho_{X_2} a_{X_2, X_1} + r_{X_1, X_2} (s_{X_1} + s_{X_2}), \\ \dot{\rho}_{X_1} &= \sum_{\{X'\} \cup X_2} r_{X_1, X'} (a_{X', X_1} + a_{X_1, X'}) + 2\rho_{X_1} s_{X_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

ЛЕММА 1 [6]. Для произвольного графа типа дерева деформация (5) с учетом формул (4) сохраняет условие факторизации (3).

ТЕОРЕМА 2. Для произвольного графа Γ_3 с вершинами валентности три и произвольным конечным числом петель деформация (5) сохраняет свойство периодичности тогда и только тогда, когда для каждого замкнутого цикла с последовательно пронумерованными (циклически упорядоченными) вершинами $\{X_i\}_{i=1}^n, X_{n+1} \equiv X_1$, выполнены следующие два условия:

$$(a) \quad \prod_{k=1}^n (-) \frac{q_{X_k, X_{k+1}}}{q_{X_{k+1}, X_k}} = 1 \quad (\text{условие коцикла, см. [5]}), \quad (6)$$

$$(b) \quad \sum_{i=1}^n r_{X_i, X_{i+1}} \prod_{k=1}^{i-1} (-) \frac{q_{X_k, X_{k+1}}}{q_{X_{k+2}, X_{k+1}}} = 0. \quad (7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство теоремы 2 представляет собой достаточно длинное, но прямое вычисление с использованием формул (4) и (5). Заметим, что производная по времени от условия (a) дает удвоенное условие (b), и надо лишь показать, что производная по времени от условия (b) тождественно равна нулю, если выполнены оба условия (a) и (b). Поскольку как условие (a), так и условие (b) удовлетворяют свойству коцикла, достаточно наложить эти условия только на базисные циклы графа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. П. Новиков // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 177–178. [2] S. P. Novikov // Fields Inst. Commun. 1999. V. 24. P. 397–413. [3] Л. О. Чехов // УМН. 1999. Т. 54. № 6. С. 109–148. [4] С. П. Новиков, И. А. Дынников // УМН. 1997. Т. 52. № 5. С. 175–234. [5] И. М. Кричевер, С. П. Новиков // УМН. 1999. Т. 54. № 6. С. 149–150. [6] Л. О. Чехов, Н. В. Пузырникова // УМН. 2000. Т. 55. № 5. С. 181–182.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: chekhov@mi.ras.ru

Принято редколлегией
25.03.2002

¹В этой формуле в работе [6] содержалась опечатка.