Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Н. Богачева, И. В. Павлов, О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 3, 143–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 04:25:48

О ХААРОВСКИХ РАСШИРЕНИЯХ БЕЗАРБИТРАЖНЫХ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ ДО БЕЗАРБИТРАЖНЫХ И ПОЛНЫХ

М. Н. БОГАЧЁВА, И. В. ПАВЛОВ

Настоящая работа связана с вопросом преобразования неполных рынков в полные. Впервые такого рода задача была рассмотрена в [1], где переход от неполных рынков к полным осуществлялся заменой исходной мартингальной меры неэквивалентной ей матрингальной мерой. Однако с помощью полученной таким образом единственной мартингальной меры невозможно вычислять цены финансовых контрактов, справедливые для изначально рассматриваемого финансового рынка. Этот недостаток впервые был преодолен в работе [2] (см. также [3]). В этой работе пополнение финансового рынка проводилось посредством добавления к рисковым активам исходного рынка дополнительных активов, функционально зависящих с изначальноными.

В докладах [4], [5] была заложена основа принципиально другого метода перехода от неполных рынков к полным – метода интерполяции. Данная статья посвящена изложению результатов, полученных в этом направлении и являющихся окончательными для модели с конечным вероятностным пространством и конечным горизонтом.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ – измеримое пространство с конечной σ -алгеброй $\mathcal{F}$; $\mathcal{P}$ – множество вероятностных мер P на $(\Omega, \mathcal{F})$, нагружающих все атомы σ -алгебры $\mathcal{F}$; $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^N$ – фильтрация, удовлетворяющая условиям $N < \infty$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ и $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$; $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^N$ – $\mathbf{F}$ -адаптированный случайный процесс; $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ – множество таких мер $P \in \mathcal{P}$, для которых процесс $(Z_k, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^N$ является мартингалом; $|\mathcal{P}(Z, \mathbf{F})|$ – число элементов множества $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$. Пусть

$$\begin{aligned} A &= B_1 + B_2 + \dots + B_m, \\ a &:= Z_k|_A, \quad b_i := Z_{k+1}|_{B_i}, \end{aligned} \tag{1}$$

где A – атом в $\mathcal{F}_k$ ($0 \leq k < N$), B_i – атомы в $\mathcal{F}_{k+1}$ ($i = 1, 2, \dots, m; 1 \leq m < \infty$).

Также рассмотрим на $(\Omega, \mathcal{F})$ так называемую хааровскую фильтрацию $\mathbf{H} = (\mathcal{H}_n)_{n=0}^L$ ($\mathcal{H}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, $\mathcal{H}_L = \mathcal{F}$), характеризующуюся следующим свойством: при любом n σ -алгебра $\mathcal{H}_n$ порождена разбиением Ω ровно на $n + 1$ атом. Хааровскую фильтрацию $\mathbf{H}$ будем называть интерполирующей хааровской фильтрацией для фильтрации $\mathbf{F}$, если существует последовательность натуральных чисел $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_N := L$, для которой $\mathcal{H}_{n_k} = \mathcal{F}_k \quad \forall k$ ($0 \leq k < N$).

Предположим, что $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ и $\mathbf{H}$ – интерполирующая хааровская фильтрация для $\mathbf{F}$. Рассмотрим случайную величину $Y_n = E^P[Z_N | \mathcal{H}_n]$ и процесс $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^L$, интерполирующий процесс Z в том смысле, что $Y_{n_k} = Z_k$. Будем говорить, что мартингальная мера $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ удовлетворяет свойству хааровской единственности (СХЕ), если для фильтрации $\mathbf{F}$ можно построить такую хааровскую интерполяцию $\mathbf{H}$, что для соответствующей мартингальной интерполяции $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^L$ имеет место соотношение $|\mathcal{P}(Y, \mathbf{H})| = 1$.

ТЕОРЕМА 1. 1) Если какая-нибудь мера $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ удовлетворяет СХЕ, то для всех k ($0 \leq k < N$) и любого атома $A \in \mathcal{F}_k$ при $m > 1$ выполняется неравенство

$$\min_{1 \leq i \leq m} b_i < a < \max_{1 \leq i \leq m} b_i, \tag{2}$$

а при $m = 1$ – равенство

$$a = b_1. \tag{3}$$

2) Если $\forall k$ ($0 \leq k < N$) и для любого атома $A \in \mathcal{F}_k$ при $m > 1$ выполняется неравенство (2), а при $m = 1$ – равенство (3), то любая мера $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ удовлетворяет СХЕ.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если существует $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$, удовлетворяющая СХЕ, то любая $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ удовлетворяет СХЕ.

Введем теперь условие, более сильное, чем условие хааровской единственности. Будем говорить, что мера $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ удовлетворяет *свойству универсальной хааровской единственности* (СУХЕ), если для любой хааровской интерполяции $\mathbf{H}$ фильтрации $\mathbf{F}$ и соответствующей мартингальной хааровской интерполяции $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^L$ мартингала $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^N$ имеет место равенство $|\mathcal{P}(Y, \mathbf{H})| = 1$.

Пусть $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ – конечный набор действительных чисел, снабженных, соответственно, весами $(p_1, p_2, \dots, p_m)$, где $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, m$. Будем говорить, что этот набор чисел удовлетворяет *условию несовпадения барицентров* (УНБ), если для любых двух непересекающихся подмножеств индексов $I = \{i_1, i_2, \dots, i_\alpha\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$ и $J = \{j_1, j_2, \dots, j_\beta\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$ выполняются неравенство:

$$\frac{b_{i_1}p_{i_1} + b_{i_2}p_{i_2} + \dots + b_{i_\alpha}p_{i_\alpha}}{p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_\alpha}} \neq \frac{b_{j_1}p_{j_1} + b_{j_2}p_{j_2} + \dots + b_{j_\beta}p_{j_\beta}}{p_{j_1} + p_{j_2} + \dots + p_{j_\beta}}.$$

Предположим, что мы находимся в рамках обозначений (1), и пусть $p_i = P(B_i)$.

ТЕОРЕМА 2. Мера $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ удовлетворяет СУХЕ тогда и только тогда, когда $\forall k$ ($0 \leq k < N$) и для любого атома $A \in \mathcal{F}_k$ набор чисел $b_1, b_2, \dots, b_m$, снабженных весами $p_1, p_2, \dots, p_m$, удовлетворяет УНБ.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F}) \neq \emptyset$. В множестве $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ есть меры, удовлетворяющие СУХЕ, тогда и только тогда, когда $\forall k$ ($0 \leq k < N$) и для любого атома A из $\mathcal{F}_k$ числа $b_1, b_2, \dots, b_m$ различны и ни одно из них не совпадает с числом a .

Если предположить, что в обозначениях (1) m всегда меньше или равно 3, то можно получить следующее усиление теоремы 3.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F}) \neq \emptyset$ и $\forall k$ ($0 \leq k < N$) при переходе от k к $k+1$ любой атом A из $\mathcal{F}_k$ дробится не более чем на три атома (т.е. $m \leq 3$). Тогда при выполнении условий теоремы 3 любая мартингальная мера $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ удовлетворяет СУХЕ.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F}) \neq \emptyset$ и существует k ($0 \leq k < N$) и атом A из $\mathcal{F}_k$, который при переходе от момента k к моменту $k+1$ дробится более чем на три атома (т.е. $m \geq 4$). Тогда существует $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$, не удовлетворяющая СУХЕ.

Покажем далее, как изложенная выше идеология может применяться к исследованию финансовых рынков. На фильтрованном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_k)_{k=0}^N$ рассмотрим (B, S) -рынок, где положительные процессы $B = (B_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^N$ и $S = (S_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^N$ отражают эволюцию, соответственно, цены банковского счета и цены акции. Обозначим $Z_k = S_k/B_k$. Предположим, что данный (B, S) -рынок безарбитражен, т.е. $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F}) \neq \emptyset$. Однако в большинстве случаев такие рынки неполны, т.е. $|\mathcal{P}(Z, \mathbf{F})| = \infty$. Хорошо известно, что все расчеты (вычисление цен опционов, расчет хеджирующих стратегий и т.д.) в рамках неполных рынков значительно сложнее, чем в полных. Изложенная выше методика указывает один из возможных путей сведения неполного рынка к полному. Именно, процесс $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^L$ интерполирует дисконтированный процесс Z на “промежуточные времена”. Так как мы считаем, что в промежуточные времена проценты в банке не начисляются, то естественно положить $\tilde{B}_n = B_k$ при $n_k \leq n < n_{k+1}$ ($0 \leq k < N$) и $\tilde{B}_L = B_N$. Таким образом, интерполяция цен акций на промежуточные времена определяется формулой: $\tilde{S}_n = \tilde{B}_n Y_n$ при $0 \leq n \leq L$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M.S. Taqqu, W. Willinger // Adv. Appl. Probab. 1987. V. 19. P. 1–25. [2] А. В. Мельников, К. М. Феоктистов // Обзорение прикл. промышл. матем. 2001. Т. 8. № 1. С. 28–40. [3] К. М. Феоктистов // УМН. 1998. Т. 53. № 6. С. 165–166. [4] M. N. Bogacheva, I. V. Pavlov // International Conference “Stochastic Analysis and Related Topics”: Abstracts of communications. St. Petersburg, 2001. P. 13–14. [5] М. Н. Богачёва, И. В. Павлов // Обзорение прикл. промышл. матем. 2001. Т. 8. № 1. С. 107–108.