Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, Алгебры Ли, ассоциированные с σ -функциями, и версальные деформации, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 3, 145–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 11:22:12

АЛГЕБРЫ ЛИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С σ -ФУНКЦИЯМИ, И ВЕРСАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

В. М. БУХШТАБЕР, Д. В. ЛЕЙКИН

Сопоставим паре полиномов f и g от двух переменных полином

$$H(f, g) = \frac{1}{4} \left| \begin{array}{cc} \frac{f(x, y) - f(z, y)}{z - x} + \frac{f(x, w) - f(z, w)}{z - x} & \frac{g(x, y) - g(z, y)}{z - x} + \frac{g(x, w) - g(z, w)}{z - x} \\ \frac{f(x, y) - f(x, w)}{y - w} + \frac{f(z, y) - f(z, w)}{y - w} & \frac{g(x, y) - g(x, w)}{y - w} + \frac{g(z, y) - g(z, w)}{y - w} \end{array} \right|.$$

При $(z, w) \rightarrow (x, y)$ получаем функциональный определитель $f_x g_y - f_y g_x$ пары f и g .

Пусть P — градуированное кольцо полиномов от $\{\lambda_k\}$ над $\mathbb{C}$, $\deg \lambda_k = k$ и $\deg t = 0$ для $t \in \mathbb{C}$. Далее n и s всегда обозначают пару взаимно простых натуральных чисел таких, что $s > n \geq 2$. Для $t \in \mathbb{C}$ положим $F(x, y, \lambda; t) = y^n - x^s - \sum_{i,j} t \lambda_{ns-in-js} x^i y^j$, где $0 \leq i \leq s-2$ и $0 \leq j \leq n-2$. Пусть $\deg x = n$ и $\deg y = s$, тогда $\deg F = ns$.

Введем кольцо $Q_t = P[x, y]/(\nabla F(x, y, \lambda; t))$, где $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$. Набор мономов $G = \{x^i y^j\}$, $0 \leq i \leq s-2, 0 \leq j \leq n-2$, образует базис кольца Q_t . Обозначим через $I_{n,s}$ упорядоченное по убыванию множество весов $\{i_1 = 2(ns - n - s), i_2, \dots, i_{(n-1)(s-1)} = 0\}$ элементов базиса G ; отметим, что это упорядочение строгое. Для $x^i y^j \in G$ положим $x^i y^j = e_k$, где $k = in + js \in I_{n,s}$. Получаем $e = \{e_i\}$. Обозначим через $\mathcal{F}(x, y, \lambda)$ образ полинома $F(x, y, \lambda; 1)$ в кольце Q_1 . Фиксируем базис $\{e_i \tilde{e}_j\}$ в кольце $E_t = Q_t \otimes_P Q_t \approx P[x, y, z, w]/(\nabla F(x, y, \lambda; t), \nabla F(x, w, \lambda; t))$.

ЛЕММА 1. Образ полинома $H(\nabla F(x, y, \lambda; t)) \mathcal{F}(x, y, \lambda)$ в кольце E_t представляет собой симметрическую билинейную форму $S^{(t)}(e, \tilde{e})$, с матрицей $\{s_{i,j}^{(t)}(\lambda)\}$.

Введем производящую функцию линейных дифференциальных операторов $\{\ell_k^{(t)}\}$ на кольце P :

$$\ell^{(t)}(e) = \sum_{i \in I_{n,s}} e_i \ell_{2(ns-n-s)-i}^{(t)} = \sum_{i,j \in I_{n,s}} e_i s_{i,j}^{(t)}(\lambda) \partial_{\lambda_{ns-j}}.$$

Операторы $\ell_k^{(t)}$ занумерованы весами, $\deg \ell_k^{(t)} = k$, так что $\deg \ell^{(t)}(e) = 2(ns - n - s)$.

ЛЕММА 2. Положим $\gamma(i, j) = 3ns - 2n - 2s - i - j$. Тогда $s_{i,j}^{(0)}(\lambda) = \gamma(i, j) \lambda_{\gamma(i,j)}$, если $(ns - \gamma(i, j)) \in I_{n,s}$, и равно нулю в остальных случаях.

Обозначим через $\Delta(\lambda; t)$ определитель матрицы $S^{(t)}(\lambda)$.

ЛЕММА 3. Имеем $\Delta(\lambda; 0) = (ns \lambda_{ns})^{(n-1)(s-1)}$, и $\Delta(\lambda; 1)$ с точностью до числового множителя равен дискриминанту $\Delta_F(\lambda)$ полинома $F(x, y, \lambda; 1)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $k \in I_{n,s}$ и $\phi_k(\lambda, t) \in P$. Тогда $\ell_k^{(t)}(\Delta(\lambda; t)) = \phi_k(\lambda; t) \Delta(\lambda; t)$, причем $\phi_0(\lambda; t) = (n-1)n(s-1)s$, а $\phi_k(\lambda; 0) = 0$, $k > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Векторные поля $\ell_k^{(t)}$ касаются поверхности $\{\Delta(\lambda; t) = 0\}$.

В теории особенностей [1] полиномы вида $F(x, y, \lambda; 1)$ встречаются как миниверсальные деформации изолированной особенности $y^n - x^s$. Им сопоставляются так называемые матрицы *линеаризованного сворачивания* и матрицы *полного сворачивания* инвариантов группы, связанной с особенностью. В работе [2] описан алгоритм вычисления матриц полного сворачивания, основанный на методе [3] построения векторных полей касающихся дискриминанта особенности.

СЛЕДСТВИЕ 6. Семейство матриц $S^{(t)}(\lambda)$ дает матрицу *линеаризованного сворачивания* при $t = 0$ и матрицу *полного сворачивания* при $t = 1$.

Рассмотрим алгебру Ли W_1 векторных полей на прямой с базисом $\{\xi_k = t^{k+1} d/dt\}$, $k = -1, 0, 1, \dots$, и коммутационными соотношениями $[\xi_i, \xi_j] = (j - i) \xi_{i+j}$.

ТЕОРЕМА 7. Набор операторов $\{\ell_k^{(0)}\}$, $k \in I_{n,s}$, порождает алгебру Ли $W_1^{(n,s)}$, у которой $[\ell_i^{(0)}, \ell_j^{(0)}] = (j-i)\ell_{i+j}^{(0)}$, если $i+j \in I_{n,s}$, и равно нулю в остальных случаях. Таким образом, для любой пары (n, s) определена фактор-алгебра Ли $W_1^{(n,s)}$ алгебры Ли W_1 по модулю соотношений: $\{\ell_q^{(0)} = 0, \text{ если } q \in \mathbb{Z} \setminus I_{n,s}\}$.

Центральное место в наших исследованиях по теории абелевых функций занимают σ -функции [4], связанные с так называемыми (n, s) -кривыми, задаваемыми уравнениями $f_{n,s}(x, y, \lambda) = 0$. Полином $f_{n,s}(x, y, \lambda)$ равен $F(x, y, \lambda; 1)$, в котором все λ_j с отрицательными j равны 0, т.е. представляет собой деформацию особенности $y^n - x^s$ с нулевыми модальными параметрами. Размерность пространства оставшихся параметров $\{\lambda_j\}_{j>0}$ равна $d_{n,s} = (n+1)(s+1)/2 - [s/n] - 3$. Обозначим через P_+ кольцо полиномов от $\{\lambda_j\}_{j>0}$.

Введем универсальное пространство $J_{n,s}$ многообразий Якоби (n, s) -кривых как пространство расслоения $J_{n,s} \rightarrow M_{n,s} \cong \mathbb{C}^{d_{n,s}}$, слоем которого над точкой $\lambda \in M_{n,s}$ является многообразие Якоби соответствующей кривой. В слое имеются канонические координаты $u = (u_1, \dots, u_g)$, $g = (n-1)(s-1)/2$ (см. [5]). Сигма-функция представляет собой целую функцию $\sigma: J_{n,s} \rightarrow \mathbb{C}$ по всем аргументам. В кольце $\mathfrak{D}$ дифференциальных операторов по u и λ с полиномиальными коэффициентами лежит аннуляторный идеал $\mathfrak{A}(\sigma) = \{L \in \mathfrak{D} \mid L(\sigma(u, \lambda)) = 0\}$. Идеал $\mathfrak{A}(\sigma)$ порожден операторами $\{L_k\}$, $k \in I_{n,s}$, при этом $[L_i, L_j] = \sum_k c_{i,j}^k(\lambda) L_k$, где $c_{i,j}^k(\lambda) \in P_+$. отождествим полиномы из P_+ с операторами умножения на них в кольце функций на $J_{n,s}$. При этом $[L_i, p]$ для $p \in P_+$ представляет собой оператор умножения на некоторый полином из P_+ . Пусть $\pi: P \rightarrow P$ — проектор, выделяющий P_+ . Определим действие операторов $\{L_k\}$ на кольце P формулой $L_i(p) = [L_i, \pi(p)]$.

ТЕОРЕМА 8. Действие оператора L_k на кольце P задается векторным полем $\ell_k^{(1)}$ по формуле $L_k(p) = \pi(\ell_k^{(1)}(\pi(p)))$.

Изолированная особенность называется простой, если число ее модальных параметров равно нулю [1]. Все простые особенности вида $y^n - x^s$ исчерпываются списком пар (n, s) : $(2, 2g+1)$, $g = 1, 2, \dots$; $(3, 4)$ и $(3, 5)$. В этих случаях $P_+ = P$.

СЛЕДСТВИЕ 9. Для простых особенностей вида $y^n - x^s$ указанное действие дает точное представление алгебры Ли, порожденной операторами $\{L_k\}$ и операторами умножения на полиномы из P .

Введем операторы $\{L_k^{(0)}\}$ на $Q = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_g]$, полагая $L_i^{(0)}(q) = L_i(q)|_{\lambda=0}$ для $q \in Q$.

ТЕОРЕМА 10. Указанное действие операторов $\{L_k^{(0)}\}$ реализует точное представление алгебры Ли $W_1^{(n,s)}$ на кольце Q , при котором $\{L_k^{(0)}\}$ порождают аннуляторный идеал полинома $\sigma(u, 0)$.

Полиномы $\sigma(u, 0)$ описаны в работе [5] и называются полиномами Шура–Вейерштрасса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Арнольд. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996. [2] А. Б. Гивенталь // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14. № 2. С. 4–14. [3] В. М. Закалюкин // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10. № 2. С. 69–70. [4] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin // Rev. Math. Math. Phys. 1997. V. 10. № 2. P. 3–120. [5] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, В. З. Энольский // Функц. анализ и его прил. 1999. Т. 33. № 2. С. 1–15.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Институт магнетизма, Киев, Украина
E-mail: buchstab@mendeleev.ru, dile@imag.kiev.ua

Принято редколлегией
06.05.2002