Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Гусейнов, Р. Т. Пашаев, Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 3, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm517>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 02:32:34

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

И. М. Гусейнов, Р. Т. Пашаев

Рассмотрим граничную задачу

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x)y, \quad 0 < x < +\infty, \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad (2)$$

где функция $q(x)$ – вещественная,

$$\int_0^\infty x|q(x)|dx < +\infty \text{ и } \rho(x) = \begin{cases} \alpha^2, & 0 \leq x < a, \\ 1, & x \geq a. \end{cases} \quad (3)$$

В случае $\alpha = 1$, т.е. когда $\rho(x) \equiv 1$, обратная задача теории рассеяния для граничной задачи (1)–(2) полностью решена в работе [1] (см. также [2]–[4]). При $0 < \alpha \neq 1$ эта задача изучалась в работе [5], однако в ней не было получено окончательных результатов. В настоящей работе полностью решается обратная задача рассеяния для граничной задачи (1)–(2) в случае, когда $0 < \alpha \neq 1$. Оказывается, что в данном случае разрыв у функции $\rho(x)$ сильно влияет на структуры представления решения Йоста и основного уравнения обратной задачи. Отметим, что подобные трудности не возникают для системы уравнений Дирака с разрывными коэффициентами [6].

Как известно [5], граничная задача (1)–(2) имеет лишь конечное число простых отрицательных собственных значений $-\kappa_1^2, \dots, -\kappa_n^2$ ($\kappa_j > 0$), а полуось составляет ее абсолютно-непрерывный спектр. Для нормированных собственных функций задачи (1)–(2) при $x \rightarrow +\infty$ имеют место асимптотические формулы $u_j(x) \sim m_j e^{-\kappa_j x}$, $j = 1, \dots, n$; $u(x, \lambda) \sim e^{-i\lambda x} - \frac{S(\lambda)e^{i\lambda x}}{S(\lambda)}$, в которых $S(\lambda)$, $-\infty < \lambda < +\infty$, – непрерывная функция, обладающая свойством $\overline{S(\lambda)} = S(-\lambda) = S^{-1}(\lambda)$, m_j – некоторые положительные числа.

Совокупность величин $\{S(\lambda), -\infty < \lambda < +\infty; -\kappa_1^2, \dots, -\kappa_n^2; m_1, \dots, m_n\}$ называется данными рассеяния граничной задачи (1)–(2). Обратная задача теории рассеяния состоит в восстановлении граничной задачи (1)–(2) (функции $q(x)$) по данным рассеяния.

Нетрудно проверить, что функция

$$f_0(x, \lambda) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \right) e^{i\lambda\mu^+(x)} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \right) e^{i\lambda\mu^-(x)},$$

где $\mu^\pm(x) = \pm x\sqrt{\rho(x)} + a(1 \mp \sqrt{\rho(x)})$, является решением Йоста уравнения (1), когда $q(x) \equiv 0$. В дальнейшем важную роль играет следующая теорема о представлении (нетреугольном) решения Йоста уравнения (1).

ТЕОРЕМА 1. Если выполнены условия (3), то уравнение (1) имеет единственное решение $f(x, \lambda)$, представимое в виде

$$f(x, \lambda) = f_0(x, \lambda) + \int_{\mu^+(x)}^{+\infty} K(x, t) e^{i\lambda t} dt, \quad (4)$$

причем функция $K(x, \cdot) \in L_1(\mu^+(x), +\infty)$ и обладает следующими свойствами:

- $\frac{d}{dx} K(x, \mu^+(x)) = -\frac{1}{4\sqrt{\rho(x)}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \right) q(x),$
- $\frac{d}{dx} \{K(x, \mu^-(x) + 0) - K(x, \mu^-(x) - 0)\} = \frac{1}{4\sqrt{\rho(x)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \right) q(x),$

если $q(x)$ дифференцируема, то $K(x, t)$ удовлетворяет (п.в.) уравнению

$$\text{с) } \rho(x) K_{tt}'' - K_{xx}'' + q(x)K = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad t > \mu^+(x).$$

Метод восстановления $q(x)$ и решение обратной задачи основаны на том, что ядро $K(x, t)$ из представления (4) удовлетворяет следующему функционально-интегральному уравнению – основному уравнению обратной задачи:

$$K(x, t) + \frac{1 - \sqrt{\rho(x)}}{1 + \sqrt{\rho(x)}} K(x, 2a - t) + F(x, t) + \int_{\mu^+(x)}^{+\infty} K(x, \xi) F_0(\xi + t) d\xi = 0, \quad t > \mu^+(x), \quad (5)$$

где $F_0(x)$ и $F(x, t)$ определяются через данные рассеяния по формулам

$$F_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{S_0(\lambda) - S(\lambda)\} e^{i\lambda x} d\lambda + \sum_{j=1}^n m_j^2 e^{-\kappa_j x}, \quad S_0(\lambda) = \overline{\frac{f_0(0, \lambda)}{f_0(0, \lambda)}},$$

$$F(x, t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \right) F_0(t + \mu^+(x)) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \right) F_0(t + \mu^-(x)).$$

ТЕОРЕМА 2. Основное уравнение (5) имеет при каждом фиксированном $x \geq 0$ единственное решение $K(x, \cdot) \in L_1(\mu^+(x), +\infty)$.

СЛЕДСТВИЕ. Данные рассеяния однозначно определяют граничную задачу (1)–(2).

Использование уравнения (5) и теорем 1 и 2 позволяет установить характеристические свойства данных рассеяния:

ТЕОРЕМА 3. Совокупность величин $\{S(\lambda), -\infty < \lambda < +\infty; -\kappa_1^2, \dots, -\kappa_n^2; m_1, \dots, m_n\}$, $0 < \kappa_1 < \dots < \kappa_n$, $m_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, является данными рассеяния для некоторой граничной задачи вида (1)–(2) с коэффициентами из класса (3) в том и только том случае, когда

- 1) $S(\lambda)$ – непрерывная функция на вещественной оси $-\infty < \lambda < +\infty$, $\overline{S(\lambda)} = S(-\lambda) = S^{-1}(\lambda)$;
- 2) $S_0(\lambda) - S(\lambda)$ является преобразованием Фурье некоторой функции из пространства $L_1(-\infty, +\infty)$, функция $F_0(x)$ дифференцируема на $(2a(1 - \alpha), +\infty)$ и $\int_0^\infty x |F'_0(2\mu^+(x))| dx < \infty$;
- 3) $\frac{1}{2\pi} \{\arg S_0(\lambda) - \arg S(\lambda)\} \Big|_{+0}^{+\infty} = n + \frac{1 - S(0)}{4}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично исследуется обратная задача рассеяния для граничной задачи (1)–(2) и в случае, когда $\rho(x)$ – положительная кусочно-постоянная функция с конечным числом точек разрыва.

Авторы благодарны проф. М. Г. Гасымову за полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Марченко // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. № 5. С. 695–698. [2] В. А. Марченко. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. [3] М. Г. Крейн // Докл. АН СССР. 1955. Т. 105. С. 433–436. [4] Б. М. Левитан // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 4. С. 611–624. [5] М. Г. Гасымов // Неклассические методы в геофизике. Новосибирск: Наука, 1977. С. 37–44. [6] И. М. Гусейнов // Докл. АН Азерб. 1999. Т. 55. № 1–2. С. 13–18.

Бакинский государственный университет

Принято редколлегией
25.03.2002