Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М.-М. Деза, М. И. Штогрин, Критерий вложимости (r, q) -полициклов, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 3, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm518>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 14:32:48

КРИТЕРИЙ ВЛОЖИМОСТИ (r, q) -ПОЛИЦИКЛОВ

М. ДЕЗА, М. И. ШТОГРИН

Определения (r, q) -полициклов и терминология даны в [1]–[4]. Обозначения элементарных эллиптических полициклов взяты из [4]. В работе [3] мы рассматривали изометрические (или со шкалой λ) вложения графических метрик полициклов в гиперкубы. В частности, там среди эллиптических полициклов указаны два собственных $(5, 3)$ -полицикла с $p_5 = 6$ таких, что любой $(5, 3)$ -полицикл, отличный от остова додекаэдра (5^3) , вложим (причем со шкалой $\lambda = 2$), если и только если он не содержит ни одного из двух этих полициклов в качестве индуцированного подграфа, а именно: E_4 и $D \cup E_2 \cup D$, см. [4; рис. 5] и [3; теорема 2]. Имеет место аналогичная теорема для $(3, 5)$ -полициклов, завершающая вопрос о вложимости всех (r, q) -полициклов (для $(r, q) \neq (5, 3)$, $(3, 5)$ не вложимы лишь 3 полицикла – куб без ребра, октаэдр без ребра и октаэдр с расщепленной вершиной):

ТЕОРЕМА. Любой $(3, 5)$ -полицикл, отличный от реберного остова икосаэдра (3^5) и остова икосаэдра без вершины $(3^5) - v$, вложим (причем со шкалой $\lambda = 2$), если и только если он не содержит в качестве индуцированного подграфа ни одного из двух собственных $(3, 5)$ -полициклов с десятью вершинами, а именно: s_3 и $d \cup e_2 \cup d$.

Важным необходимым условием изометрической вложимости графа G в примитивную кубическую решетку Z_n со шкалой λ является выполнение 5-гонального неравенства [5]

$$ab + ac + bc + xy \leq ax + bx + cx + ay + by + cy$$

для попарных расстояний между любыми пятью его вершинами a, b, c, x, y ; нарушение 5-гонального неравенства – не 5-гональность – влечет не вложимость.

Клеточный комплекс, состоящий из всех вершин, ребер и граней (r, q) -полицикла, не инцидентных с его краем, назовем его *ядром*. Полицикл с непустым связным ядром назовем *нетривиальным элементарным полициклом*, если все его грани инцидентны с его ядром; из него нельзя удалить ни одну грань, не уменьшив при этом ядра. Отдельный r -угольник – это *тривиальный элементарный полицикл* с пустым ядром. Любой r -угольник инцидентен лишь с одной связной компонентой ядра при всех эллиптических параметрах $(r, q) = (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$, так как кратчайший реберный путь между любыми двумя вершинами r -угольника целиком находится внутри объединения двух звезд r -угольников с центрами в этих вершинах. Все инцидентные с непустой связной компонентой ядра r -угольники составляют *нетривиальное элементарное слагаемое*.

ЛЕММА. Любой (r, q) -полицикл с эллиптическими параметрами (r, q) однозначно представляется в виде объединения элементарных слагаемых – тривиальных и максимальных нетривиальных элементарных подполициклов, попарно не имеющих общих граней.

ПРИМЕЧАНИЕ. Любое элементарное слагаемое в объемлющем эллиптическом полицикле является изометрическим (в смысле графической метрики).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Все элементарные слагаемые $(3, 5)$ -полициклов представлены в [4; рис. 6], отсюда взяты их обозначения. Два полицикла $a_1 = (3^5)$ и $a_5 = (3^5) - v$, содержащие не 5-гональный подполицикл s_3 как индуцированный, вложимы. Два полицикла $a_5 \cup d$ и $d \cup a_5 \cup d$, содержащие не 5-гональный подполицикл $d \cup e_3 \cup d$ как индуцированный, напротив, не вложимы (не 5-гональны). Других $(3, 5)$ -полициклов, содержащих a_5 в качестве элементарного слагаемого, нет. Полициклы $a_2, a_3, a_4, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ имеют среди своих изометрических подполициклов хотя бы один не 5-гональный полицикл s_3 . В силу этого и примечания произвольный $(3, 5)$ -полицикл (его параметры эллиптические), содержащий любой из этих полициклов в

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00803) и Фонда поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96011).

качестве элементарного слагаемого, не 5-гонален. Других (3, 5)-полициклов, содержащих подполицикл c_3 , не существует.

Полициклы e_i , $i \geq 4$, b_1 и a_6 содержат изометрический не 5-гональный подполицикл $d \cup e_3 \cup d$. В силу этого и примечания произвольный (3, 5)-полицикл, содержащий в качестве элементарного слагаемого любой из них (полицикл a_6 не расширяем), не 5-гонален.

Осталось исследовать (3, 5)-полициклы с элементарными слагаемыми c_4 , d , e_1 , e_2 , e_3 . Мы докажем, что при отсутствии подполицикла $d \cup e_2 \cup d$ они вложимы. На самом деле мы докажем, что любая альтернированная зона задает выпуклый разрез (определение см. ниже); этого вполне достаточно для вложимости, см. [6].

Выберем в (3, 5)-полицикле любой треугольник (мы полагаем, что его основание снизу и горизонтально). Возьмем смежный по боковой стороне второй треугольник (его основание сверху), с ним смежный по боковой стороне третий треугольник (его основание опять снизу) и т. д. Продолжив эту цепочку треугольников столько, сколько это возможно, вправо и влево по горизонтали, получим цепочку треугольников, называемую *альтернированной зоной*; все боковые стороны треугольников этой зоны суть *ребра зоны*.

Пусть граф G представляет собою реберный остов (3, 5)-полицикла. После удаления из графа G всех ребер зоны остаток распадается на два связанных графа G_1 и G_2 . Если каждый кратчайший реберный путь в графе G между любыми двумя вершинами, принадлежащими подграфу G_i при любом фиксированном $i = 1, 2$, состоит только из ребер этого подграфа G_i , то мы говорим, что зона осуществляет *выпуклый разрез* данного (3, 5)-полицикла.

Возьмем любую альтернированную зону. Боковые стороны треугольника лежат внутри зоны, лишь крайняя левая и крайняя правая из них суть торцы зоны; основание треугольника лежит на краю зоны. Пусть основание треугольника принадлежит ядру. Тогда полицикл e_2 , ядром которого служит это основание, есть подполицикл данного (3, 5)-полицикла. Лишь по одному ребру полицикла e_2 , оба конца которого имеют степень 3, к нему может примыкать треугольник d (полицикл $d \cup e_2 \cup d$ по условиям теоремы запрещен); другое такое ребро полицикла e_2 всегда представляет собою торец зоны. Если на краю зоны нет двух оснований подряд, принадлежащих ядру, то еще одно такое основание может встретиться на краю зоны лишь у другого ее торца. Все вершины на краях зоны, не принадлежащие этим основаниям из ядра, хотя бы через одну лежат на краю объемлющего (3, 5)-полицикла. В силу этого и примечания зона задает выпуклый разрез. Если же на краю зоны два основания подряд принадлежат ядру, то зона имеет всего 8 ребер; ее торцы суть оба ребра элементарного полицикла e_3 с концами степени 3. Эта зона в силу примечания опять задает выпуклый разрез. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полициклы E_4 , $D \cup E_2 \cup D$, c_3 , $d \cup e_2 \cup d$ являются частичными, но не изометрическими подграфами в остовах (5^3) и (3^5) ; из них индуцированными являются только элементарные полициклы E_4 и c_3 . Среди полициклов, данных в [4; рис. 5 и рис. 6], вложимы в полукубы (т.е. изометрически со шкалой $\lambda = 2$ вложимы в гиперкубы) только полициклы $A_1 \supset A_5$, $C_3 \supset E_3 \supset E_2 \supset E_1 \supset D$ и $a_1 \supset a_5 \supset b_4 \supset c_4$, $e_3 \supset e_2 \supset e_1 \supset d$; знак $\supset$ означает “надполицикл содержит подполицикл”. Любой вложимый конечный (r, q) -полицикл вложим в $(\frac{k}{2} + z)$ -мерный куб при четном r и вложим со шкалой $\lambda = 2$ в $(k + z)$ -мерный куб при нечетном r ; здесь k – периметр полицикла, а z – число замкнутых зон (т.е. циклов, состоящих из противоположных ребер граней, не включающих внешнюю грань).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Деза, М. И. Штогрин // УМН. 2000. Т. 55. № 1. С. 179–180. [2] М. И. Штогрин // УМН. 2000. Т. 55. № 2. С. 155–156. [3] М. Деза, М. И. Штогрин // УМН. 2000. Т. 55. № 6. С. 159–160. [4] М. Deza, M. I. Shtogrin // J. Geom. Phys. 2002. V. 40. P. 302–319. [5] М. Е. Тылкин // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. № 5. С. 1037–1040. [6] V. Cherpoi, M. Deza, V. P. Grishukhin // Discrete Appl. Math. 1997. V. 80. P. 3–19.