Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Дынников, Об одном отображении Янга–Бакстера и упорядочении Деорнуа, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 3, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm519>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:03:33

ОБ ОДНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ЯНГА–БАКСТЕРА И УПОРЯДОЧЕНИИ ДЕОРНУА

И. А. Дынников

Отображение $f: X \times X \rightarrow X \times X$ называется *отображением Янга–Бакстера* на множестве X , если выполнено соотношение

$$(f \times \text{id}_X) \circ (\text{id}_X \times f) \circ (f \times \text{id}_X) = (\text{id}_X \times f) \circ (f \times \text{id}_X) \circ (\text{id}_X \times f). \quad (1)$$

Изучать такие отображения было предложено в [1], термин “отображение Янга–Бакстера” мы заимствовали из [2]. Различные подходы к построению отображений Янга–Бакстера и ряд примеров содержатся в [2]–[4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, заданное формулой $f(a, b, c, d) = (a', b', c', d')$, где*

$$\begin{aligned} a' &= \max(a, a + b, b + c), & b' &= d - \max(0, a - b - c + \max(0, b) + \max(0, d)), \\ c' &= a + c + d - \max(a, c, a + d), & d' &= \max(b, a - c + \max(0, b) + \max(0, d)), \end{aligned} \quad (2)$$

является невырожденным (т.е. биективным) отображением Янга–Бакстера на $\mathbb{R}^2$. Обратное отображение задается формулой $f^{-1} = \tau \circ f \circ \tau$, где $\tau(a, b, c, d) = (-a, b, -c, d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Явной подстановкой легко проверить, что отображение

$$f^r(a, b, c, d) = \left(a + ab + bc, \frac{bcd}{bc + a(1+b)(1+d)}, \frac{acd}{a + c + ad}, \frac{bc + a(1+b)(1+d)}{c} \right), \quad (3)$$

полученное из f заменой операций $+$, $-$, $\max$ на $\cdot$, $/$, $+$ соответственно, является отображением Янга–Бакстера на $\mathbb{R}_+^2$. В этом вычислении используются только свойства коммутативности и дистрибутивности операций $\cdot$, $/$, $+$, которыми обладают $+$, $-$, $\max$.

Отображения f и f^r задают действия ρ и ρ^r группы кос B_n на $\mathbb{R}^{2n}$ и $\mathbb{R}_+^{2n}$ соответственно стандартным образом. Поясним геометрический смысл действий ρ и ρ^r .

Группа кос B_n может быть вложена в группу $MCG^{0, n+3}$ классов диффеоморфизмов сферы S^2 с $n + 3$ отмеченными точками $P_0, P_1, \dots, P_{n+2}$. При этом образующей σ_i соответствует полускручивание Дэна вокруг точек P_i, P_{i+1} . Группа $MCG^{0, n+3}$ действует стандартным образом на пространстве $L^{0, n+3}$ ламинаций и пространстве Тайхмюллера $T^{0, n+3}$ поверхности $S^2 - \{P_0, \dots, P_{n+2}\}$. Действие ρ (ρ^r) есть не что иное, как записанное в специальной системе координат ограничение стандартного действия группы $MCG^{0, n+3}$ на пространстве $L^{0, n+3}$ (соответственно, $T^{0, n+3}$) на подгруппу B_n .

Реализуем сферу S^2 как $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Положим $P_k = (k, 0)$ для $k = 0, \dots, n + 1$, $P_{n+2} = \infty$, $e_0 = \{(x, 0) \mid x < 0\}$, $e_{3k+1} = \{(k + 1/2, y)\}$ для $k = 0, \dots, n$, $e_{3k-1} = \{(k, y) \mid y > 0\}$, $e_{3k} = \{(k, y) \mid y < 0\}$ для $k = 1, \dots, n$, $e_{3n+2} = \{(x, 0) \mid x > n + 1\}$. Вершины P_k и ребра e_k задают сингулярную триангуляцию сферы S^2 .

Действие группы B_n на $T^{0, n+3}$ совпадает с ρ^r , если в качестве координат $(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ на $T^{0, n+3}$ взять $a_k = \lambda_{3k-1}/\lambda_{3k}$, $b_k = \lambda_{3k-2}/\lambda_{3k+1}$, где λ_i — λ -длина ребра e_i , определенная в [5].

Чтобы проще объяснить геометрический смысл действия ρ , ограничимся лишь целочисленными точками $\mathbb{Z}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$. *Целочисленной ламинацией* на $S^2 - \{P_0, \dots, P_{n+2}\}$ будем называть произвольный изотопический класс объединения непересекающихся простых замкнутых кривых на $S^2 - \{P_0, \dots, P_{n+2}\}$, ни одна из которых не гомотопна нулю и не ограничивает диск, содержащий ровно одну из точек P_k . Для целочисленной ламинации l будем обозначать через $\mu_k(l)$ наименьшее возможное число точек пересечения представителя из l с ребром e_k . На множестве $L_{\mathbb{Z}}^{0, n+3}$ целочисленных ламинаций введем следующий набор функций: $a_i(l) = (\mu_{3i-1}(l) - \mu_{3i}(l))/2$, $b_i(l) = (\mu_{3i-2}(l) - \mu_{3i+1}(l))/2$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00090).

ЛЕММА 1. Набор функций $(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ задает взаимно однозначное отображение $L_{\mathbb{Z}}^{0,n+3} \rightarrow \mathbb{Z}^{2n}$. При этом отождествлении действие группы B_n на $L_{\mathbb{Z}}^{0,n+3}$ совпадает с действием ρ .

Доказательство лишь в деталях отличается от доказательства аналогичных утверждений в [6].

Напомним, что коса $b \in B_n$ называется σ -положительной (см. [7]), если для некоторого k , $0 < k < n$, она может быть представлена словом в стандартных образующих σ_i , не содержащим $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ и содержащим σ_k только в положительной степени. Коса, обратная к σ -положительной, называется σ -отрицательной. В [7] доказано, что каждая нетривиальная коса либо σ -положительна, либо σ -отрицательна. Тем самым, на группе B_n можно определить правоинвариантный порядок, положив $b_1 > b_2$, если $b_1 b_2^{-1}$ — σ -положительная коса. В [7] предложен алгоритм, определяющий, является ли данная коса σ -положительной, σ -отрицательной или тривиальной. Хотя на практике этот алгоритм работает быстро, полиномиальная оценка его скорости пока не доказана.

Рассмотрим частичный порядок $<_{\text{oddlex}}$ в $\mathbb{Z}^{2n}$, заданный следующим образом: $x <_{\text{oddlex}} y$, если для некоторого $j \leq n$ выполнено: $x_{2j-1} < y_{2j-1}$ и $x_{2i-1} = y_{2i-1}$ для всех $0 < i < j$. Обозначим через L_0 набор $(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1) \in \mathbb{Z}^{2n}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Коса $b \in B_n$ σ -положительна (σ -отрицательна) тогда и только тогда, когда $L_0 <_{\text{oddlex}} b \cdot L_0$ (соответственно, $b \cdot L_0 <_{\text{oddlex}} L_0$).

Это утверждение дает простой алгоритм для определения по данной косе b , какое из неравенств $b > 1$ или $b < 1$ имеет место.¹ Для оценки его скорости введем следующее определение.

Пусть коса b записана в виде $b = \Delta_{i_1 j_1}^{p_1} \dots \Delta_{i_m j_m}^{p_m}$, где Δ_{ij}^p — элементы типа Гарсайда: $\Delta_{ij}^p = (\sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{j-1})(\sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{j-2}) \dots \sigma_i$. Δ -длиной слова b мы будем называть величину $|b|_{\Delta} = \sum_{s=1}^m (1 + \ln(j_s - i_s) + \ln |p_s|)$.

Заметим, что для любого слова b , задающего косу, имеет место оценка $|b|_{\Delta} \leq |b|$. В пространстве $\mathbb{Z}^{2n}$ мы используем следующую норму: $\|x\| = \max_{i=1}^n |x_i|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для произвольной косы $b \in B_n$ имеет место оценка $\ln \|b \cdot L_0\| \leq 2|b|_{\Delta}$. Следовательно, элемент $b \cdot L_0$ может быть вычислен за $\text{const} \cdot |b|_{\Delta} \cdot |b|$ операций.

Отметим, что оценка времени, необходимого для сравнения косы b с 1 в σ -упорядочении зависит лишь от длины слова b и не зависит от числа нитей. До недавнего времени среди алгоритмов для решения проблемы равенства слов в группе B_n наилучшую оценку времени работы имел алгоритм из работы [9], где n входило в оценку линейно. Недавно в работе [10] независимо появился алгоритм, подобный нашему, где, однако, не было замечено, что действие на ламинациях связано с некоторым отображением Янга–Бакстера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. Drinfeld // Lecture Notes in Math. 1992. V. 1510. P. 1–8. [2] В. М. Бухштабер // УМН. 1998. Т. 53. № 6. С. 241–242. [3] A. Weinstein, P. Xu // Comm. Math. Phys. 1992. V. 148. P. 304–343. [4] M. Wada // Topology. V. 31. № 2. P. 399–406. [5] J. Penner // Comm. Math. Phys. 1987. V. 113. № 2. P. 299–339. [6] V. Fock. Dual Teichmüller spaces // Preprint, <http://xxx.lanl.gov/e-print/dg-ga/9702018>. [7] P. Dehornoy // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 345. № 1. P. 115–150. [8] R. Fenn, M. T. Greene, D. Rolfsen, C. Rourke, B. Wiest // Pacific J. Math. 1999. V. 191. № 1. P. 49–74. [9] J. Birman, K. H. Ko, S. J. Lee // Adv. Math. 1998. V. 139. P. 322–353. [10] А. В. Малютин // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2001. Т. 279. С. 200–215.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: dynnikov@mech.math.msu.ru

Принято редколлегией
25.03.2002

¹Первоначально автором была лишь замечено, что действие ρ дает быстрый алгоритм распознавания тривиальной косы. Вопрос о связи этого действия с σ -упорядочением был поставлен П. Деорнуа, а ответ высказан в качестве гипотезы С. Оревковым, который указал автору на работу [8], где использованы похожие геометрические идеи.