Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Парфенов, Тензорные произведения с конечным числом орбит, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 3, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm52>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 05:17:51

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ОРБИТ

П. Г. ПАРФЕНОВ

Обозначим группу $GL_{k_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_{k_r}(\mathbb{C})$ и линейное пространство $\mathbb{C}^{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{k_r}$ через $GL_{k_1 \dots k_r}$ и $\mathbb{C}^{k_1 \dots k_r}$, соответственно. Рассмотрим естественное действие $GL_{k_1 \dots k_r}$ в $\mathbb{C}^{k_1 \dots k_r}$ (далее везде предполагаем, что $k_1, \dots, k_r \geq 2$).

Данная работа посвящена решению следующей задачи: классифицировать все наборы $(k_1, \dots, k_r)$, для которых это действие имеет конечное число орбит, и для такого набора описать орбиты и их замыкания.

Множество орбит можно наделить естественной структурой упорядоченного множества, считая, что одна орбита меньше другой, если она содержится в ее замыкании. С каждым упорядоченным множеством связан граф, вершины которого отождествляются с элементами этого множества, и две вершины x и y соединяются стрелкой (в сторону y), если $y < x$ и не существует такого элемента z , что $y < z < x$. Граф упорядоченного относительно замыкания множества орбит называется графом примыканий орбит.

Классификацию всех наборов $(k_1, \dots, k_r)$, для которых рассматриваемое здесь действие имеет конечное число орбит, можно извлечь, по крайней мере, из трех независимых работ: [1], [2], [3]. Это следующие наборы с точностью до перестановки чисел в каждом из них: (n) , (n, m) , $(2, 2, n)$, $(2, 3, n)$. Для всех этих наборов, за исключением тривиальных случаев (n) и (n, m) , в теореме 2 приводится таблица представителей орбит, а в теореме 3 – граф примыканий орбит соответствующего действия. Теорема 1 является общим утверждением, которое используется при доказательстве теорем 2 и 3.

Пусть $\{e_1^i, \dots, e_{k_i}^i\}$ ($1 \leq i \leq r$) – базис пространства $\mathbb{C}^{k_i}$. Обозначим через $e_{j_1 \dots j_r}$ тензорные произведения $e_{j_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{j_r}^r$, образующие базис $\mathbb{C}^{k_1 \dots k_r}$. Представители орбит действий, соответствующих наборам $(2, 2, n)$ и $(2, 3, n)$, можно выбрать из следующего списка 27 элементов (теорема 2 будет ссылаться на них по нормам): 1) 0, 2) e_{111} , 3) $e_{111} + e_{221}$, 4) $e_{111} + e_{212}$, 5) $e_{111} + e_{122}$, 6) $e_{111} + e_{122} + e_{212}$, 7) $e_{111} + e_{222}$, 8) $e_{111} + e_{122} + e_{231}$, 9) $e_{111} + e_{122} + e_{221} + e_{232}$, 10) $e_{111} + e_{122} + e_{133}$, 11) $e_{111} + e_{122} + e_{213}$, 12) $e_{111} + e_{122} + e_{232} + e_{213}$, 13) $e_{111} + e_{122} + e_{212} + e_{223}$, 14) $e_{111} + e_{122} + e_{133} + e_{212}$, 15) $e_{111} + e_{122} + e_{233}$, 16) $e_{111} + e_{122} + e_{133} + e_{212} + e_{223}$, 17) $e_{111} + e_{122} + e_{212} + e_{233}$, 18) $e_{111} + e_{122} + e_{211} + e_{233}$, 19) $e_{111} + e_{122} + e_{213} + e_{224}$, 20) $e_{111} + e_{123} + e_{134} + e_{212}$, 21) $e_{111} + e_{123} + e_{134} + e_{212} + e_{224}$, 22) $e_{111} + e_{123} + e_{212} + e_{234}$, 23) $e_{111} + e_{122} + e_{134} + e_{212} + e_{223}$, 24) $e_{111} + e_{122} + e_{133} + e_{212} +$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00783а).

$e_{223} + e_{234}, 25) e_{111} + e_{123} + e_{134} + e_{212} + e_{225}, 26) e_{111} + e_{123} + e_{134} + e_{212} + e_{224} + e_{235},$
 $27) e_{111} + e_{122} + e_{133} + e_{214} + e_{225} + e_{236}.$

ТЕОРЕМА 1. Пусть редуктивная группа F действует в векторном пространстве U . Рассмотрим группу $G = F \times GL_k$, пространство $V = U \otimes \mathbb{C}^k$ и действие $G : V$, являющееся тензорным произведением действия $F : U$ и стандартного действия $GL_k : \mathbb{C}^k$. При $\tilde{k} \leq k$ рассмотрим естественное действие подгруппы $\tilde{G} = F \times GL_{\tilde{k}} \subset G$ на подпространстве $\tilde{V} = U \otimes \mathbb{C}^{\tilde{k}} \subset V$. Пусть $u, v \in \tilde{V}$. Тогда:

- (а) если u и v эквивалентны относительно G , то они эквивалентны относительно $\tilde{G}$,
- (б) если $v \in \overline{Gu}$, то $v \in \tilde{G}u$.

ТЕОРЕМА 2. Для каждого из случаев $(2, 2, n)$ и $(2, 3, n)$ ниже указаны количество орбит и их представители.

- $(2, 2, 2) - 7$ орбит с представителями 1-7.
- $(2, 2, 3) - 9$ орбит с представителями 1-9.
- $(2, 2, n), n \geq 4 - 10$ орбит с представителями 1-9, 19.
- $(2, 3, 3) - 18$ орбит с представителями 1-18.
- $(2, 3, 4) - 24$ орбиты с представителями 1-24.
- $(2, 3, 5) - 26$ орбит с представителями 1-26.
- $(2, 3, n), n \geq 6 - 27$ орбит с представителями 1-27.

ТЕОРЕМА 3. Граф примыканий орбит любого действия из теоремы 1 есть подграф графа на рис.1, обозначенный вершинами, номера которых являются номерами орбит этого действия.

Рис. 1

Я благодарю своего научного руководителя профессора Э. Б. Винберга за постановку задачи, ценные указания и неослабевающее внимание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кас V. G. // J. Algebra. 1980. V. 64. P. 190-213. [2] Шпиз Г. Б. // Геом. методы в задачах алгебры и анализа. Ярославль, 1978. С. 152-160. [3] Sato M., Kimura T. // Nagoya Math. J. 1977. V. 65. P. 1-155.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
07.04.1998