Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Злобин, О некоторых интегральных тождествах, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 3, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm520>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:00:49

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ТОЖДЕСТВАХ

С. А. ЗЛОВИН

В работе [1] установлено интегральное тождество, связывающее два различных метода построения диофантовых приближений к значениям дзета-функции Римана в целых точках. В данной статье доказывается более общий результат.

Пусть даны натуральные числа $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_l = m, r_0 = 0$. Определим многочлены $Q_j(z, x_1, x_2, \dots, x_m), 1 \leq j \leq l$:

$$Q_0 = 1, \quad Q_j(z, x_1, x_2, \dots, x_m) = Q_{j-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_m) - z(1 - x_{r_j}) \prod_{1 \leq i < r_j} x_i.$$

Таким образом, $Q_j(z, x_1, x_2, \dots, x_m) = 1 - zx_1x_2 \dots x_{r_1-1} + zx_1x_2 \dots x_{r_1} - \dots - zx_1x_2 \dots x_{r_{j-1}-1} + zx_1x_2 \dots x_{r_j}$, и, очевидно, $Q_j(z, x_1, x_2, \dots, x_m) \neq 0$ при $z \in \mathbb{C}, |z| < 1, 0 \leq x_i \leq 1$. Пусть даны комплексные числа a_0 и $a_i, b_i, 1 \leq i \leq m$. Введем обозначения:

$$S = \{r_j \mid 1 \leq j \leq l\}, \quad c_i = \begin{cases} a_i, & \text{если } i \notin S, \\ a_{r_{j-1}}, & \text{если } i = r_j \in S. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА. Пусть $\operatorname{Re}(a_0) > 0, \operatorname{Re}(b_i) > \operatorname{Re}(a_i) > 0$ при $1 \leq i \leq m, \operatorname{Re}(b_i) > \operatorname{Re}(c_i)$ при $i \in S$. Тогда при $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_l(z, x_1, x_2, \dots, x_m)^{a_0}} d\vec{x} \\ &= \frac{\Gamma(a_m)}{\Gamma(a_0)} \prod_{i \in S} \frac{\Gamma(b_i - a_i)}{\Gamma(b_i - c_i)} \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{c_i-1} (1-x_i)^{b_i-c_i-1}}{\prod_{i \in S} (1 - zx_1 \dots x_i)^{b_i-a_i}} d\vec{x}, \end{aligned}$$

где $d\vec{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_m$ и оба интеграла сходятся.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сходимость интегралов очевидна.

Доказательство проведем индукцией по l . Для удобства будем считать, что интеграл по нульмерному пространству равен единице; при $l = 0$ имеем $1 = \frac{\Gamma(a_0)}{\Gamma(a_0)}$, и база индукции проверена.

Проведем шаг индукции, где буква n для краткости обозначает r_{l-1} . Сделаем в первом интеграле замену $x_m \rightarrow 1 - x_m$ и представим его в виде:

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_{l-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_m)^{a_0}} \\ &\quad \times \int_{[0,1]^{m-n}} \frac{\prod_{n < i < m} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1} \cdot x_m^{b_m-a_m-1} (1-x_m)^{a_m-1}}{(1 - zx_1 \dots x_m / Q_{l-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_m))^{a_0}} d\vec{x}. \quad (1) \end{aligned}$$

При $|z| < 1$ имеем:

$$\left| \frac{zx_1 \dots x_m}{Q_{l-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_m)} \right| \leq |z| \cdot \frac{x_1 \dots x_m}{Q_{l-1}(1, x_1, x_2, \dots, x_m)} \leq |z| < 1,$$

следовательно, справедливо представление:

$$\left(1 - \frac{zx_1 \dots x_m}{Q_{l-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_m)} \right)^{-a_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_0 + k)}{\Gamma(a_0) k!} \left(\frac{zx_1 \dots x_m}{Q_{l-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_m)} \right)^k.$$

Подставив этот ряд в (1), получим представление внутреннего интеграла в виде суммы

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_0+k)}{\Gamma(a_0)k!} \prod_{n < i < m} \frac{\Gamma(a_i+k)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i+k)} \cdot \frac{\Gamma(b_m-a_m+k)\Gamma(a_m)}{\Gamma(b_m+k)} \times \left(\frac{zx_1 \cdots x_n}{Q_{l-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_m)} \right)^k.$$

Переставив суммирование и интегрирование (равномерная сходимость имеется), представим (1) в виде

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\Gamma(a_0+k)}{\Gamma(a_0)k!} \prod_{n < i < m} \frac{\Gamma(a_i+k)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i+k)} \cdot \frac{\Gamma(b_m-a_m+k)\Gamma(a_m)}{\Gamma(b_m+k)} \times \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{(a_i+k)-1} (1-x_i)^{(b_i+k)-(a_i+k)-1}}{Q_{l-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_m)^{a_0+k}} d\vec{x}. \quad (2)$$

Согласно индукционному предположению, последний интеграл равен

$$\frac{\Gamma(a_n+k)}{\Gamma(a_0+k)} \prod_{i \in S'} \frac{\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i-c_i)} \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{c_i+k-1} (1-x_i)^{b_i-c_i-1}}{\prod_{i \in S'} (1-zx_1 \cdots x_i)^{b_i-a_i}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

где $S' = S \setminus \{m\}$.

Воспользуемся этим представлением и поменяем в (2) суммирование и интегрирование:

$$I = \prod_{i \in S'} \frac{\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i-c_i)} \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{c_i-1} (1-x_i)^{b_i-c_i-1}}{\prod_{i \in S'} (1-zx_1 \cdots x_i)^{b_i-a_i}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_n+k)}{\Gamma(a_0)k!} \times \prod_{n < i < m} \frac{\Gamma(a_i+k)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i+k)} \cdot \frac{\Gamma(b_m-a_m+k)\Gamma(a_m)}{\Gamma(b_m+k)} (zx_1 x_2 \cdots x_n)^k dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Для завершения доказательства заметим, что внутренняя сумма может быть представлена в виде

$$\frac{\Gamma(c_m)}{\Gamma(a_0)} \prod_{n < i \leq m} \frac{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i)} \cdot {}_{m-n+1}F_{m-n} \left[\begin{matrix} b_m-a_m, c_{n+1}, \dots, c_{m-1}, c_m \\ b_{n+1}, \dots, b_{m-1}, b_m \end{matrix}; zx_1 x_2 \cdots x_n \right] \\ = \frac{\Gamma(a_m)}{\Gamma(a_0)} \frac{\Gamma(b_m-a_m)}{\Gamma(b_m-c_m)} \int_{[0,1]^{m-n}} \frac{\prod_{n < i \leq m} x_i^{c_i-1} (1-x_i)^{b_i-c_i-1}}{(1-zx_1 \cdots x_m)^{b_m-a_m}} dx_{n+1} \cdots dx_m.$$

Теорема доказана.

Результаты работы [1] получаются из теоремы при $r_j = 2j$, $1 \leq j \leq l$; $r_{l+1} = 2l+1$.

В заключение отметим, что случай, когда знаменатель подынтегрального выражения есть степень $Q = 1 - zx_1 x_2 \cdots x_{r_1} + zx_1 x_2 \cdots x_{r_2} - \cdots + (-1)^l zx_1 x_2 \cdots x_{r_l}$, сводится к теореме. При четном l многочлен Q может быть представлен в требуемом в теореме виде, а при нечетном l необходимо вначале сделать замену $x_{r_l} \rightarrow 1 - x_{r_l}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. А. Злобин // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 5. С. 782–787.