Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Куршев, Моментная оценка для процесса Леви, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 3, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm522>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:11:56

МОМЕНТНАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ ПРОЦЕССА ЛЕВИ

А. Е. КУРШЕВ

Пусть X – безгранично делимая случайная величина. Предположим, что $E|X| < \infty$, $EX = 0$ и X не содержит гауссовской компоненты. Как известно, характеристическая функция X может быть представлена в виде

$$Ee^{i\theta X} = \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}} (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x) \nu(dx) \right\},$$

где ν – σ -конечная борелевская мера с $\nu(\{0\}) = 0$ и

$$\int_{\mathbb{R}} (|x| \wedge |x|^2) \nu(dx) < \infty. \quad (1)$$

В случае, когда $\nu(\mathbb{R}) > 0$, определим $l_1 = l_1(\nu) > 0$ как решение уравнения

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|x|}{l_1} \wedge \frac{|x|^2}{l_1^2} \right) \nu(dx) = 1.$$

В силу (1) l_1 определяется однозначно.

В [1] предлагаются оценки для $E|X|$ как функции от $l_1(\nu)$, а именно, утверждается

ТЕОРЕМА 1.

$$\frac{1}{4}l_1(\nu) \leq E|X| \leq \frac{17}{8}l_1(\nu). \quad (2)$$

В настоящей работе дано обобщение теоремы 1 на случай L^n -нормы процессов Леви.

Пусть $X = (X_t)_{t \geq 0}$ – процесс Леви с $E|X_t|^n < \infty$, $EX_t = 0$ и триплетом $(0, 0, \nu)$. Как известно,

$$Ee^{i\theta X_t} = \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}} (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x) \nu_t(dx) \right\},$$

где

$$\nu_t(dx) = t \cdot \nu(dx). \quad (3)$$

Если $\nu(\mathbb{R}) > 0$, зададим $l_n = l_n(\nu) > 0$ с помощью равенства

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|x|^n}{l_n^n} \wedge \frac{|x|^{n+1}}{l_n^{n+1}} \right) \nu(dx) = 1.$$

Поскольку $E|X_t|^n < \infty$, l_n определяется однозначно.

Рассмотрим разложение $X_t = Y_t + Z_t$, где Y_t и Z_t независимы, с $EY_t = EZ_t = 0$ и характеристическими функциями

$$Ee^{i\theta Y_t} = \exp \left\{ t \int_{|x| < l_n} (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x) \nu(dx) \right\},$$

$$Ee^{i\theta Z_t} = \exp \left\{ t \int_{|x| \geq l_n} (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x) \nu(dx) \right\}.$$

ЛЕММА 1.

$$\mathbb{E}|Y_t|^m \leq a_m \int_{|x| < l_n} |x|^m \nu(dx), \quad m = 2, \dots, n+1, \quad (4)$$

$$\mathbb{E}|Z_t|^m \leq b_m \int_{|x| \geq l_n} |x|^m \nu(dx), \quad m = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где

$$a_m = \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{k_2, \dots, k_m \geq 0 \\ \sum_{j=2}^m j k_j = m}} \frac{m!}{k_2! \dots k_m!} \left(\frac{\lambda t}{2!}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{\lambda t}{m!}\right)^{k_m},$$

$$b_m = \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^m \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \geq 0 \\ \sum_{j=1}^r j k_j = r}} \frac{m!}{k_1! \dots k_r! (m-r)!} \left(\frac{\mu t}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{\mu t}{r!}\right)^{k_r} (\mu t)^{m-r},$$

$$\lambda = \nu(\{|x| < l_n\}), \quad \mu = \nu(\{|x| \geq l_n\}).$$

Неравенство (4) получается с помощью m -кратного дифференцирования характеристической функции Y_t по θ . Соотношение (5) доказывается для составного процесса Пуассона, совпадающего по распределению с Z_t .

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы неравенства*

$$c_n(t) l_1^n \leq \mathbb{E}|X_t|^n \leq C_n(t) l_n^n,$$

где

$$c_n(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{4}\right)^n, & t \leq 2, \\ \left(\frac{t}{(4+6t)^{1/2}}\right)^n, & t > 2, \end{cases}$$

$$C_n(\lambda, \mu, t) = \max_{u \in [0,1]} ((a_{n+1}u)^{1/(n+1)} + (b_n(1-u))^{1/n})^n.$$

Нижняя оценка получается для $n = 1$ из доказательства нижней оценки в (2) с использованием (3) и обобщается для произвольного момента с помощью неравенства Ляпунова. Технической основой доказательства верхней оценки является лемма 1.

СЛЕДСТВИЕ.

$$c_1(t) l_1 \leq \mathbb{E}|X_t| \leq \left(2t + \frac{1}{8}\right) l_1. \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $t = 1$, как и следовало ожидать, (6) представляет собой утверждение теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. B. Marcus, J. Rosinski // Electron. Comm. Probab. 2001. V. 6. P. 15–29.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
25.03.2002