Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, Задачи Борсука и Хадвигера и системы векторов с запретами на скалярные произведения, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 3, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm523>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:25:24

ЗАДАЧИ БОРСУКА И ХАДВИГЕРА И СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ С ЗАПРЕТАМИ НА СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

А. М. РАЙГОРОДСКИЙ

1. Введение и формулировка результата. Настоящая работа возникла в результате изучения двух задач комбинаторной геометрии – задачи Борсука и задачи Хадвигера. Первая задача состоит в нахождении минимального числа $f(d)$ такого, что всякое ограниченное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ может быть разбито на $f(d)$ частей меньшего диаметра (в [1] Борсук высказал гипотезу, что $f(d) = d + 1$). Вторая задача (см. [2]) связана с определением так называемого хроматического числа евклидова пространства, т.е. величины $\chi(\mathbb{R}^d)$, равной наименьшему числу красок, необходимых для такой раскраски всего $\mathbb{R}^d$, при которой расстояние между точками одного цвета $\neq 1$. В обеих задачах были получены многочисленные результаты. Так, например, гипотеза Борсука была доказана при $d \leq 3$, а также для произвольных выпуклых тел с гладкой границей. В то же время в достаточно больших размерностях были найдены контрпримеры: доказано, что гипотеза неверна, по крайней мере, при всех $d \geq 323$ (см. [3] и [4]) и что имеет место оценка $f(d) \geq (1.2255 \dots + o(1))^{\sqrt{d}}$ (см. [5]). В задаче Хадвигера наилучшими из известных являются, в частности, неравенства $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ и $(1.239 \dots + o(1))^d \leq \chi(\mathbb{R}^d) \leq (3 + o(1))^d$ (см. [6]–[9]). Наконец, сравнительно недавно выяснилось, что некоторый общий подход, связанный с рассмотрением решетчатых многогранников, позволяет получать нетривиальные нижние оценки как для $f(d)$, так и для $\chi(\mathbb{R}^d)$. Описание этого подхода, а также более подробную историю изложенных вопросов можно найти в [10]. Здесь же мы заметим лишь, что, в свою очередь, в рамках упомянутого подхода наиболее эффективно используется техника, относящаяся к экстремальной теории гиперграфов с запретами на мощности пересечения ребер и восходящая к работе Франкла и Вилсона (см. [11]). Такая техника была в существенной степени доработана и обобщена автором, которому удалось показать важность изучения экстремальных свойств систем $(0, 1, -1)$ -векторов (см. замечание 1 в следующем пункте). В настоящей заметке будет изложен новый метод получения верхних оценок для мощностей некоторых таких систем с запретами на скалярные произведения.

Пусть фиксированы натуральные числа $n, k, b = 2^k$ с условием, что $\frac{n}{2} \leq b \leq cn$, $\frac{1}{2} < c < 1$. Пусть, кроме того, μ есть число нечетных чисел на отрезке $[2b - n, b]$, а η есть число четных чисел на отрезке $[2, b - 2]$. Рассмотрим систему векторов $\Sigma = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1, -1\}^n : |\{x_i = \pm 1\}| = b\}$ и предположим, что первая ненулевая координата в каждом из векторов равна единице. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА. *Какова бы ни была подсистема векторов $Q = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\} \subset \Sigma$, удовлетворяющая условиям $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq 0 \quad \forall i \neq j$, выполнена оценка $s \leq P(n) \max_t C_n^{\mu+t} C_{n-\mu-t}^{\eta-2t}$, где максимум берется по всем натуральным $t \in [0, \eta/2]$, а $P(n)$ есть некоторый полином.*

2. Доказательство теоремы и некоторые замечания. Предлагаемое доказательство опирается на методы линейной алгебры в комбинаторике. Для каждой пары векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$ мы определим величину $|\mathbf{x} \cap \mathbf{y}| = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2$, которая равна мощности пересечения множеств ненулевых координат этих векторов. Заметим сразу, что $|\mathbf{x} \cap \mathbf{y}| \equiv 0 \pmod{2}$ тогда и только тогда, когда $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{2}$. Положим $\nu = \sum_{i=1}^{\infty} [(b-2)/2^i]$ и каждому вектору $\mathbf{x} \in \Sigma$ сопоставим полином $F_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n]$: $F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = 2^{-\nu} \prod_l (l - |\mathbf{x} \cap \mathbf{y}|) \times \prod_m (m - (\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, где l пробегает множество всех нечетных чисел на отрезке $[2b - n, b]$ (т.е. количество сомножителей в первом произведении равно μ), m четно и меняется в пределах от двойки до $b - 2$ (так что степень второго произведения равна η), а выражение $|\mathbf{x} \cap \mathbf{y}|$ можно, вообще говоря, понимать, отвлекаясь от его изначального определения, и как формальную запись $\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2$, имеющую смысл

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 02-01-00912, 00-15-96109).

не только для $\mathbf{y} \in \Sigma$. Теперь от полиномов $F_{\mathbf{x}}$ мы стандартным образом перейдем к полиномам $\tilde{F}_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n]$, последовательно применяя соотношения $y_i^3 = y_i$, $i = 1, \dots, n$, которые, во всяком случае, верны для координат векторов из системы Σ (ср., скажем, [5]). Нетрудно убедиться в том, что для построенных полиномов и пар $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$ выполнены следующие свойства: а) если $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ нечетно, то $\tilde{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = 0$; б) если $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ четно и не равно ни нулю, ни b , то $\tilde{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{2}$; в) если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{0, b\}$, то $\tilde{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv 1 \pmod{2}$. (Здесь мы фактически пользуемся замеченным выше свойством одновременной четности величин $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $|\mathbf{x} \cap \mathbf{y}|$ и определением числа ν ; кроме того, ясно, что всегда $|\mathbf{x} \cap \mathbf{y}| \in [2b - n, b]$.) Рассуждения, аналогичные тем, что были впервые проведены автором в [3] и более детально изложены им в [10], показывают, что из свойств а)–в) следует линейная независимость над $\mathbb{Q}$ полиномов $\tilde{F}_{\mathbf{x}_1}, \dots, \tilde{F}_{\mathbf{x}_s}$, где векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s$ суть элементы произвольной подсистемы $Q \subset \Sigma$ из формулировки теоремы. Стало быть, s не превосходит размерности пространства, порожденного полиномами $\tilde{F}_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \in \Sigma$. В свою очередь, из конструкции полиномов немедленно вытекает искомое неравенство: $s \leq P(n) \max_t C_{n-\mu-t}^{\mu+t} C_{n-\mu-t}^{\eta-2t}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказанная теорема напрямую связана с гипотезой автора (см. [10]) о том, что при $b = n/2$ правильной является оценка $s \leq 2^n$. Тем самым, с одной стороны, нами предложен новый подход к доказательству этой гипотезы и к получению нетривиальных смежных результатов. С другой стороны, нами найдено некоторое обоснование того факта, что в гипотезе фигурирует именно степень двойки ($n = 2^{k+1}$): в самом деле, детальный анализ нашего метода показывает, что в его рамках (при доказательстве линейной независимости полиномов) работать нужно с классами вычетов по четному модулю и что, более того, модуль обязан иметь вид p^α . Отметим, что из гипотезы вытекает возможность опровержения гипотезы Борсука при всех $d \geq 135$ и получения оценок $f(d) \geq (1.632 \dots + o(1))\sqrt{d}$ и $\chi(\mathbb{R}^d) \geq (1.414 \dots + o(1))^d$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Результаты, аналогичные доказанным, могут быть также сформулированы и для случаев, когда в каждом векторе рассматриваемой системы Σ фиксировано число отрицательных координат. Такого рода результаты позволяют улучшать константу в нижней оценке для $\chi(\mathbb{R}^d)$, но в настоящей работе мы на них не останавливаемся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Borsuk // Fund. Math. 1933. V. 20. P. 177–190. [2] H. Hadwiger // Portugal. Math. 1944. V. 4. P. 140–144. [3] А. М. Райгородский // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 181–182. [4] A. Hinrichs // Discrete Math. 2002. V. 243. P. 253–256. [5] А. М. Райгородский // УМН. 1999. Т. 54. № 2. С. 185–186. [6] L. Moser, W. Moser // Canad. Math. Bull. 1961. V. 4. P. 187–189. [7] H. Hadwiger // Elem. Math. 1961. V. 16. P. 103–104. [8] А. М. Райгородский // УМН. 2000. Т. 55. № 2. С. 147–148. [9] D. G. Larman, C. A. Rogers // Mathematika. 1972. V. 19. P. 1–24. [10] А. М. Райгородский // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 107–146. [11] P. Frankl, R. Wilson // Combinatorica. 1981. V. 1. P. 357–368.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
25.03.2002