Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. О. Шейнман, Сигма-функции и базисы Кричевера–Новикова, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 6, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5231>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:29:00

Сигма-функции и базисы Кричевера–Новикова

Л. О. Шейнман

Алгебры Кричевера–Новикова введены в работе [1] в ходе создания нового подхода к теории струн. Важным свойством алгебр Кричевера–Новикова является наличие в них базиса, получившего название базиса Кричевера–Новикова, который позволяет ввести на этих алгебрах почти градуированную структуру. В данной работе рассматривается алгебра Кричевера–Новикова функций, мероморфных на римановой поверхности, которые могут иметь полюсы лишь в двух отмеченных точках.

В случае эллиптических кривых для базисных функций Кричевера–Новикова есть явные выражения в терминах σ -функций Вейерштрасса [1], [2]. На римановых поверхностях общего вида в [2] даны явные выражения в терминах θ -функций и прим-форм.

В настоящей работе даются явные выражения для базисных функций Кричевера–Новикова на римановых поверхностях, основанные на результатах работ [3], [4].

Пусть V – гиперэллиптическая поверхность рода 2, заданная уравнением $y^2 = x^5 + \lambda_3 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_0$, и $du_i = \frac{x^{i-1}}{2y} dx$ ($i = 1, 2$) – базис голоморфных дифференциалов на V . Далее, пусть A – отображение Абеля, W – универсальное абелево накрытие кривой V , $\hat{A}: W \rightarrow \mathbb{C}^2$ – отображение, накрывающее отображение Абеля, $\hat{A}(P, [\gamma]) = (\int_\gamma du_1, \int_\gamma du_2)$, где интеграл берется от ∞ до точки P (∞ – бесконечно удаленная точка кривой V). Если γ – цикл на V , то через $\hat{A}(\gamma)$ будем обозначать $(\int_\gamma du_1, \int_\gamma du_2)$.

На пространстве W рассмотрим функции $\sigma(\hat{A}(P, [\gamma]) - c)$ ($c \in \mathbb{C}^2$, σ обозначает σ -функцию римановой поверхности V (см. [3])) и функцию ψ (см. [2]). Эти функции голоморфны на W и обладают следующими свойствами:

- (1) квазипериодичность: $\sigma(\hat{A}(P, [\gamma] + \chi) - c) = \varepsilon \exp\{2E^t(\hat{A}(P, [\gamma]) - c + \frac{1}{2}\hat{A}(\chi))\} \times \sigma(\hat{A}(P, [\gamma]) - c)$, $\psi(P, [\gamma] + \chi) = \varepsilon \exp\{2E^t(\hat{A}(P, [\gamma]) + \frac{1}{2}\hat{A}(\chi))\} \psi(P, [\gamma])$, где χ – цикл на поверхности V , проходящий через точку P , ε – некоторая константа, и E – некоторый вектор, общие для всех этих функций при данном χ ;
- (2) если P_0 – точка на поверхности V , отличная от ∞ , и γ_0 – произвольный путь, ведущий от точки ∞ к точке P_0 , то функция $\sigma(\hat{A}(P, [\gamma]) - \hat{A}(P_0, \gamma_0))$ имеет на пространстве W нули кратности 1 в точках $(P_0, [\gamma])$ и нули кратности 1 в точках $(\infty, [\gamma])$ для всех γ и не имеет других нулей на W ;
- (3) функция ψ имеет нули кратности 2 в точках $(\infty, [\gamma])$ пространства W и не имеет других нулей на W .

Пусть на поверхности V даны две различные точки P_+ и P_- , отличные от ∞ , для которых существует базис Кричевера–Новикова. Рассмотрим на W функции:

$$B_0(P) \equiv 1, \quad B_{-1}(P) = \frac{\sigma(\hat{A}(P) - \hat{A}(P_+) - 2\hat{A}(P_-)) \cdot \psi(P)}{\sigma(\hat{A}(P) - \hat{A}(P_+) - \hat{A}(P_-)) \cdot \sigma(\hat{A}(P) - \hat{A}(P_-))},$$

$$B_{-2}(P) = \frac{\sigma(\hat{A}(P) - 2\hat{A}(P_+) - \hat{A}(P_-)) \cdot \psi(P)}{\sigma(\hat{A}(P) - \hat{A}(P_+) - \hat{A}(P_-)) \cdot \sigma(\hat{A}(P) - \hat{A}(P_+))},$$

$$B_n(P) = \frac{\sigma^n(\hat{A}(P) - \hat{A}(P_+)) \cdot \psi(P)}{\sigma^{n+2}(\hat{A}(P) - \hat{A}(P_-))} \sigma(\hat{A}(P) + n\hat{A}(P_+) - (n+2)\hat{A}(P_-)), \quad n \neq -2, -1, 0.$$

Здесь всюду для краткости P обозначает пару $(P, [\gamma])$.

ТЕОРЕМА 1. *Функции B_n при всех n не зависят от класса эквивалентности пути $[\gamma]$, а только от точки $P \in V$ и, следовательно, корректно определены на поверхности V . Функции B_n , $n \in \mathbb{Z}$, с точностью до нормировки, требуемой в определении базиса Кричевера–Новикова, образуют базис Кричевера–Новикова.*

Представляет интерес вычисление структурных констант алгебр Кричевера–Новикова. Для эллиптических кривых явный вид базиса Кричевера–Новикова указан в [1], в данной работе мы используем его в следующем, несколько измененном виде:

$$A_0(z) \equiv 1, \quad A_{-1}(z) = -\frac{\sigma(z - (z_1 + z_2))\sigma(z)\sigma(z_1 - z_2)}{\sigma(z - z_1)\sigma(z - z_2)\sigma(z_1)\sigma(z_2)},$$

$$A_n(z) = \frac{\sigma^n(z - z_1)\sigma^{n+1}(z_1 - z_2)}{\sigma^{n+1}(z - z_2)\sigma((n+1)(z_1 - z_2))}\sigma(z + nz_1 - (n+1)z_2) \text{ при } n \neq -1, 0.$$

ТЕОРЕМА 2. Произведение базисных функций A_n и A_m имеет вид

$$A_n A_m = A_{n+m} + \sum_{i=1}^3 c_{n+m+i} A_{n+m+i}.$$

Перечень всех возможных случаев для переменных m и n и выражения для ненулевых структурных констант в этих случаях имеют вид

(1) $n, m \neq -1, 0, n + m + 1 \neq -1, 0$:

$$c_{n+m+1} = -\frac{\sigma(n(z_1 - z_2))\sigma(m(z_1 - z_2))\sigma((n+m+2)(z_1 - z_2))}{\sigma(z_1 - z_2)\sigma((n+1)(z_1 - z_2))\sigma((m+1)(z_1 - z_2))\sigma((n+m+1)(z_1 - z_2))};$$

(2) $n, m \neq -1, 0, n + m + 1 = -1$: $c_0 = \frac{\sigma((m+2)(z_1 - z_2))\sigma(m(z_1 - z_2))}{\sigma^2(z_1 - z_2)\sigma^2((m+1)(z_1 - z_2))};$

(3) $n, m \neq -1, 0, n + m + 1 = 0$: $c_0 = \zeta((n+1)(z_1 - z_2)) + \zeta((m+1)(z_1 - z_2)) - (\zeta(z_1) - \zeta(z_2));$

(4) $n = -1, m \neq -1, 0, n + m + 2 \neq -1, 0$: $c_m = \zeta((m+1)(z_1 - z_2)) - \zeta(m(z_1 - z_2)) - 2\zeta(z_1 - z_2) + \zeta(z_1) - \zeta(z_2);$ $c_{m+1} = \frac{\sigma(m(z_1 - z_2))\sigma((m+2)(z_1 - z_2))}{\sigma^2(z_1 - z_2)\sigma^2((m+1)(z_1 - z_2))};$

(5) $n = -1, m = -2$: $c_{-2} = \zeta(z_1) - \zeta(z_2) + \zeta(2(z_1 - z_2)) - 3\zeta(z_1 - z_2),$ $c_0 = -\frac{\sigma(2(z_1 - z_2))}{\sigma^4(z_1 - z_2)};$

(6) $n = m = -1$: $c_{-1} = 2\zeta(z_1) - 2\zeta(z_2) - 2\zeta(z_1 - z_2),$ $c_0 = \frac{\sigma''(z_1)}{\sigma(z_1)} + \frac{\sigma''(z_2)}{\sigma(z_2)} - 2\frac{\sigma''(z_1 - z_2)}{\sigma(z_1 - z_2)} + 2\zeta^2(z_1 - z_2) - \zeta^2(z_1) - \zeta^2(z_2) - 4\zeta(z_1 - z_2)(\zeta(z_1) - \zeta(z_2)),$ $c_1 = -\frac{\sigma(2(z_1 - z_2))}{\sigma^4(z_1 - z_2)}.$

Здесь $\sigma(z)$ и $\zeta(z)$ – функции Вейерштрасса.

Автор приносит благодарность В. М. Бухштаберу за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

- [1] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прил.*, **21**:2 (1987), 46–63.
 [2] M. Schlichenmaier, *Lett. Math. Phys.*, **19**:4 (1990), 327–336. [3] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Нелинейная динамика*, Тр. МИАН, **251**, Наука, М., 2005, 54–126. [4] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin, *Solitons, geometry and topology: on the crossroad*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **179**, eds. V. M. Buchstaber and S. P. Novikov, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 1–33.

Л. О. Шейнман (L. O. Sheinman)

Московский государственный

университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: lenya@sheinman.mccme.ru

Представлено В. М. Бухштабером

Принято редколлегией

19.09.2006