Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, А. А. Аржанов, О локализации спектра в одной задаче сингулярной теории возмущений, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 3, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm524>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 12:49:37

О ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СИНГУЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

С. А. СТЕПИН, А. А. АРЖАНОВ

Рассматривается задача Штурма–Лиувилля

$$i\varepsilon y''(z) + (z^2 - \lambda)y(z) = 0, \quad (1)$$

$$y(-1) = y(1) = 0, \quad (2)$$

спектр которой дискретный и расположен в полуполосе $\{0 < \operatorname{Re} \lambda < 1, \operatorname{Im} \lambda < 0\}$, если $\varepsilon > 0$. На примере (1)–(2) исследуются особенности асимптотического распределения собственных значений для уравнений вида

$$\varepsilon y''(z) - Q(z, \lambda)y(z) = 0 \quad (3)$$

при малых ε . Главный член асимптотики собственных значений получается (ср. [1]–[4]) с использованием приближений Лиувилля–Грина

$$\tilde{y}_{1,2}(z, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{Q(z, \lambda)}} \exp\{\pm \varepsilon^{-1/2} S(z_0, z)\}, \quad S(z_0, z) = \int_{z_0}^z \sqrt{Q(\zeta, \lambda)} d\zeta,$$

для решений уравнения (3). В работе [5] с помощью этого подхода показано, что для произвольных $\delta > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$ спектр задачи (1)–(2) в области $\Omega(\delta) = \{\operatorname{Re} \lambda \in (0, 1), \operatorname{Im} \lambda \in (-2/7, 0), |\lambda| > \delta, |1 - \lambda| > \delta\}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ сосредоточен в ε^α -окрестностях луча $\arg \lambda = -\pi/4$ и кривой $\Gamma = \{\operatorname{Re} \xi(\lambda) = 0\}$, $\xi(\lambda) = e^{i\pi/4} \int_{\sqrt{\lambda}}^1 \sqrt{\zeta^2 - \lambda} d\zeta$, и найдено асимптотическое распределение собственных значений с указанной точностью.

В настоящей работе получено уточнение найденной в [5] локализации спектра задачи (1)–(2). Для этой цели используются асимптотические разложения решений уравнения (3)

$$y_{1,2}(z, \lambda) \sim \tilde{y}_{1,2}(z, \lambda) \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (\pm \varepsilon^{1/2})^k \int_{z_0}^z g_k(\zeta, \lambda) d\zeta\right\}, \quad (4)$$

$$\text{где } g_{k+1}(z, \lambda) = -\frac{1}{2\sqrt[4]{Q(z, \lambda)}} \left(g'_k(z, \lambda) + \sum_{j=0}^k g_j(z, \lambda)g_{k-j}(z, \lambda)\right), \quad g_0(z, \lambda) = -\frac{Q'(z, \lambda)}{4Q(z, \lambda)}.$$

Указанные формулы (см. [6]) справедливы на кривых, вдоль которых $\operatorname{Re} S(z_0, z)$ возрастает.

ТЕОРЕМА. При $a \in [0, 1]$ кривая $\operatorname{Re} \xi(a + ib) = 0$ представляет собой график возрастающей функции $b = f(a)$, $f(1) = 0$. Для произвольного $\delta > 0$ существуют $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0$ и $C(\delta) > 0$ такие, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ в области

$$\{\lambda = a + ib : a \in (0, 1), \min\{-a, f(a)\} + \delta < b < 0, |\lambda| > \delta, |\lambda - 1| > \delta\}$$

(содержащей $\Omega(\delta)$, если $\delta > 0$ достаточно мало) спектр задачи (1)–(2) состоит из однократных собственных значений, находящихся в $C(\delta)\varepsilon^{3/2}$ -окрестностях точек $e^{-i\pi/4}\varepsilon^{1/2}(1 + 2n)$ и точек $\lambda_n + \varepsilon\mu_n$, где

$$\xi(\lambda_n) = i\pi\varepsilon^{1/2}\left(n - \frac{1}{4}\right), \quad \mu_n = \frac{e^{3i\pi/4}}{24} \frac{6 - 1/\lambda_n}{(1 - \lambda_n)^{3/2}\xi'(\lambda_n)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Собственные значения рассматриваемой задачи совпадают с нулями характеристических определителей

$$\begin{aligned}\Delta_1(\lambda) &= Y_1(0, \lambda)Y_2(1, \lambda) - Y_1(1, \lambda)Y_2(0, \lambda), \\ \Delta_2(\lambda) &= Y_1'(0, \lambda)Y_2(1, \lambda) - Y_1(1, \lambda)Y_2'(0, \lambda),\end{aligned}$$

отвечающих некоторой фундаментальной системе решений $\{Y_1(z, \lambda), Y_2(z, \lambda)\}$ уравнения (1), для которой известно асимптотическое поведение при $\varepsilon \downarrow 0$ в точках 0 и 1. В процессе построения таких решений необходимо учитывать явление Стокса (см. [5]). Применительно к уравнению (3) оно состоит в том, что при обходе вокруг нуля z_λ функции $Q(z, \lambda)$ коэффициенты линейной комбинации $c_1 \tilde{y}_1(z, \lambda) + c_2 \tilde{y}_2(z, \lambda)$, представляющей асимптотику некоторого решения, изменяются. Соответствующие формулы связи указаны в [7] в предположении, что известна структура линий Стокса, задаваемых уравнениями $\operatorname{Re} S(z_\lambda, z) = 0$. В рассматриваемой здесь ситуации для отыскания коэффициентов c_1 и c_2 применим способ, использовавшийся в [5], который не требует априорной информации о расположении линий Стокса.

Для точек λ , принадлежащих окрестности кривой Γ , искомая фундаментальная система решений $\{Y_j(z, \lambda)\}$, $j = 1, 2$, при $z = 0$ и $z = 1$ имеет следующие асимптотические ($\varepsilon \downarrow 0$) представления:

$$\begin{aligned}Y_j(0, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt[4]{-\lambda}} \exp\{(-1)^j (\varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{a}, 0) + \varepsilon^{1/2} G(\sqrt{a}, 0))\} (1 + O(\varepsilon)), \\ Y_j(1, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt[4]{1-\lambda}} \left[\exp\{(-1)^j (\varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{a}, 1) + \varepsilon^{1/2} G(\sqrt{a}, 1))\} (1 + O(\varepsilon)) \right. \\ &\quad \left. - i(2-j) \exp\{\varepsilon^{-1/2} (\xi(\lambda) - S(\sqrt{a}, \sqrt{\lambda})) + \varepsilon^{1/2} (\eta(\lambda) - G(\sqrt{a}, 0))\} (1 + O(\varepsilon)) \right],\end{aligned}$$

где $G(z_0, z) = \int_{z_0}^z g_1(\zeta, \lambda) d\zeta$, $\eta(\lambda) = \frac{e^{-i\pi/4}}{24} \frac{6 - 1/\lambda}{(1 - \lambda)^{3/2}}$. С помощью указанных решений составляется характеристический определитель $\Delta_1(\lambda)$ и устанавливается, что для рассматриваемых значений параметра λ справедлива формула:

$$\begin{aligned}\Delta_1(\lambda) &= \frac{\exp\{\varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{\lambda}, 0)\}}{\sqrt[4]{-\lambda} \sqrt[4]{1-\lambda}} \left[i \exp\{\varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) + \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda)\} (1 + O(\varepsilon)) \right. \\ &\quad \left. - \exp\{-\varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) - \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda)\} (1 + O(\varepsilon)) \right],\end{aligned}$$

на основании которой исследуется расположение нулей $\Delta_1(\lambda)$ вблизи кривой Γ при малых значениях $\varepsilon > 0$. Асимптотический закон распределения таких нулей с точностью, указанной в теореме, может быть получен из соотношения $\cos(i\varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) + \pi/4 + i\varepsilon^{1/2} \eta(\lambda)) = 0$. Аналогично исследуется расположение нулей характеристического определителя $\Delta_2(\lambda)$ при малых ε .

Описанный в работе подход, основанный на использовании асимптотических разложений (4), позволяет изучить (с произвольной точностью) локализацию собственных значений спектральных задач для уравнений вида (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Дородницын // УМН. 1952. Т. 7. № 6. С. 3–96. [2] В. П. Маслов // Докл. АН СССР. 1954. Т. 94. № 4. С. 623–626. [3] Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1964. Т. 4. № 2. С. 267–277. [4] М. В. Федорюк // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 5. С. 811–816. [5] С. А. Степин, А. А. Аржанов // Докл. РАН. 2001. Т. 378. № 1. С. 18–21. [6] М. А. Евграфов, М. В. Федорюк // УМН. 1966. Т. 21. № 1. С. 3–50. [7] Дж. Хединг. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965.