Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Топчий, Многомерные непараметрические методы для двухвыборочной задачи сдвига, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 3, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm525>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:48:37

МНОГОМЕРНЫЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ДВУХВЫБОРОЧНОЙ ЗАДАЧИ СДВИГА

А. В. Топчий

1. В работе рассматривается двухвыборочная задача сдвига: есть две независимые k -мерные выборки $x_1, \dots, x_m$ и $y_1, \dots, y_n$ из распределений с функциями распределения $F_1(x) = F(x)$ и $F_2(x) = F(x - \Delta)$ соответственно, где F – некоторое непрерывное распределение и Δ – неизвестный параметр сдвига. Наша задача – оценить неизвестный параметр сдвига Δ и проверить нулевую гипотезу $H_0: \Delta = 0$.

2. Дадим основные определения. Пусть $V(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1})$ – (неориентированный) объем k -мерного симплекса, вершинами которого являются точки с координатами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оценку $\hat{\theta}_{mn}$ параметра Δ определим следующей формулой:

$$\hat{\theta}_{mn} = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^k} U_{mn}(\theta), \quad \text{где } U_{mn}(\theta) = (C_n^k C_m^k (k!)^2)^{-1} \sum_{(i,j)} V(\theta, y_{j_1} - x_{i_1}, \dots, y_{j_k} - x_{i_k})$$

и суммирование берется по всевозможным наборам $(i, j) = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k)$ таким, что как среди индексов $i_1, \dots, i_k$, так и среди индексов $j_1, \dots, j_k$ нет одинаковых.

Оценка $\hat{\theta}_{mn}$ аффинно инвариантна и в одномерном случае ее значение совпадает с оценкой Ходжеса–Лемана [1]. Она является медианой Оя [2] всевозможных попарных разностей элементов двух выборок.

Сформулируем условия состоятельности и асимптотической нормальности. Для этого введем дополнительные обозначения. Положим $D(\theta) = EV(\theta, y_1 - x_1, \dots, y_k - x_k)$ и будем предполагать, что $D(\theta)$ определено для всех $\theta \in \mathbb{R}^k$. Пусть Θ_0 – множество точек, на котором функция $D(\theta)$ достигает свой минимум, т.е. для всех $\theta_0 \in \Theta_0$ и всех $\theta \in \mathbb{R}^k$ $D(\theta_0) \leq D(\theta)$.

Пусть вектор $d(i, j) = (d_1(i, j), \dots, d_k(i, j))^T$ и скаляр $d_0(i, j)$ определяются из следующего разложения:

$$V(\theta, y_{j_1} - x_{i_1}, \dots, y_{j_k} - x_{i_k}) = \frac{1}{k!} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta^1 & y_{j_1}^1 - x_{i_1}^1 & \dots & y_{j_k}^1 - x_{i_k}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^k & y_{j_1}^k - x_{i_1}^k & \dots & y_{j_k}^k - x_{i_k}^k \end{pmatrix} \right| = |d_0(i, j) + d^T(i, j)\theta|.$$

Другими словами, $d_0(i, j) = (k!)^{-1} \det(y_{j_1} - x_{i_1}, \dots, y_{j_k} - x_{i_k})$, $d_l(i, j) = (k!)^{-1} A_l$, где A_l – алгебраическое дополнение к θ^l в вышеприведенной матрице, $l = 1, \dots, k$. Пусть теперь $(i, j) = (1, \dots, k, 1, \dots, k)$ и определим $\Lambda(x_1) = E(d(i, j) \operatorname{sign}(d_0(i, j) + d^T(i, j)\theta_0) \mid x_1)$. Положим $\Gamma = \operatorname{cov}(\Lambda(x_1), \Lambda(x_1))$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ – две независимые выборки из распределений $F(x)$ и $F(x - \Delta)$ соответственно, множество Θ_0 состоит из единственной точки θ_0 и верно хотя бы одно из следующих двух условий:

- (i) $E\|x_1\| < \infty$ и для некоторых чисел α_1, α_2 выполнено $0 < \alpha_1 \leq m/n \leq \alpha_2 < \infty$;
- (ii) $E\|x_1\|^r < \infty$ для некоторого $r > 1$.

Тогда $\theta_0 = \Delta$ и $\hat{\theta}_{mn} \rightarrow \Delta$ п.н. при $M := \min\{m, n\} \rightarrow \infty$.

Пусть вместо условий (i) и (ii) выполнено более сильное условие $E\|x_1\|^2 < \infty$, а также дополнительно $P(\det(y_1 - x_1 - \theta_0, \dots, y_k - x_k - \theta_0) = 0) = 0$ и в некоторой окрестности точки θ_0 верно разложение

$$D(\theta) = D(\theta_0) + \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^T A(\theta - \theta_0) + o(\|\theta - \theta_0\|^2),$$

где A – некоторая положительно определенная матрица. Тогда распределение случайной величины $\sqrt{\frac{mn}{m+n}}(\hat{\theta}_{mn} - \Delta)$ слабо сходится к k -мерному нормальному распределению с вектором средних 0 и ковариационной матрицей $\Sigma = k^2 A^{-1} \Gamma A^{-1}$.

Доказательство теоремы см. в работе [3].

3. Проверка гипотезы об однородности $H_0: \Delta = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Введем тестовую статистику $T_{mn} = \nabla U_{mn}(0)$ (вектор частных производных по θ в точке $\theta = 0$) и определим $\Psi_N = mn(m+n)^{-1} k^{-2} T_{mn}^T \Gamma_N^{-1} T_{mn}$, где Γ_N (см. [3]) – некоторая состоятельная оценка матрицы Γ .

Критерий T_{mn} является многомерным обобщением критерия Уилкоксона, а статистика Ψ_N обладает свойством аффинной инвариантности и асимптотически свободна от распределения исходных данных F .

ТЕОРЕМА 4 (об асимптотическом распределении статистик T_{mn} и Ψ_N при нулевой гипотезе). Пусть $x_1, \dots, x_m$ и $y_1, \dots, y_n$ – две независимые k -мерные выборки из распределений с функциями распределения $F_1(x) = F(x)$ и $F_2(x) = F(x - \Delta)$ соответственно. Пусть также $E\|x_1\|^2 < \infty$, $P(\det(y_1 - x_1, \dots, y_k - x_k) = 0) = 0$ и существует предел $\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} m/N$ ($0 < \lambda < 1$), где $N = m + n$. Тогда при нулевой гипотезе $H_0: \Delta = 0$ предельное распределение статистики $\sqrt{N} T_{mn}$ – k -мерное нормальное с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $\frac{k^2}{\lambda(1-\lambda)} \Gamma$, а предельное распределение статистики Ψ_N – центральное χ^2 -распределение с k степенями свободы.

ТЕОРЕМА 5 (об асимптотическом распределении статистик T_{mn} и Ψ_N при последовательности близких гипотез $H_N: \Delta_N = N^{-1/2} \delta$). При некоторых слабых условиях (сформулированных в работе [3]) асимптотическое распределение случайной величины $N^{1/2} T_{mn}$ при альтернативе H_N – k -мерное нормальное с вектором математических ожиданий $A\delta$ и ковариационной матрицей $\frac{k^2}{\lambda(1-\lambda)} \Gamma$. Предельное распределение статистики Ψ_N при гипотезе H_N – нецентральное χ^2 -распределение с k степенями свободы и параметром нецентральности $\lambda(1-\lambda)k^{-2} \delta^T A^T \Gamma^{-1} A \delta$.

Как следствие теоремы 5, мы получаем, что асимптотическая относительная эффективность по Питману критерия Ψ_N по отношению к статистике Хотеллинга T^2

$$e(\Psi_N, T^2) = k^{-2} \delta^T A^T \Gamma^{-1} A \delta / (\delta^T \Sigma_0^{-1} \delta),$$

где Σ_0 – ковариационная матрица исходного распределения F . Для гауссовских распределений (когда критерий T^2 является оптимальным) эффективность превышает значение 0.955 и возрастает к 1 с увеличением размерности пространства k . Для распределений с тяжелыми хвостами эффективность $e(\Psi_N, T^2)$ может достигать сколь угодно больших значений. В работе [3] приведены значения асимптотических эффективностей $e(\Psi_N, T^2)$ для нормального распределения и распределений Стьюдента с различными степенями свободы и размерностями k . Те же значения получаются для асимптотических относительных эффективностей (отношений обобщенных дисперсий) оценки сдвига $\hat{\theta}_{mn}$ по отношению к оценке, которая является разностью выборочных средних двух выборок $n^{-1} \sum y_j - m^{-1} \sum x_i$ и оптимальна в классе нормальных распределений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. L. Hodges, E. L. Lehmann // Ann. Math. Statist. 1963. V. 34. P. 598–611.
 [2] H. Oja // Statist. Probab. Lett. 1983. V. 1. P. 327–332. [3] А. В. Топчий, Ю. Н. Тюрин, Х. Оя. Многомерные аффинно-инвариантные методы для двухвыборочной задачи сдвига // Рукопись деп. в ВИНТИ № 2507-B2001, 2001.