Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. С. Якимова, О слабо коммутативных однородных пространствах, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 3, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm527>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:18:20

О СЛАБО КОММУТАТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

О. С. ЯКИМОВА

Пусть $X = G/K$ – связное риманово однородное пространство группы Ли G . Будем предполагать, что действие $G : X$ локально эффективно. Пусть $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$, $\mathfrak{k} = \text{Lie } K$.

Обозначим через $\mathcal{P}(T^*X)^G$ алгебру G -инвариантных функций на кокасательном расслоении T^*X , полиномиальных на слоях; через $\mathcal{D}(X)^G$ – алгебру G -инвариантных дифференциальных операторов на X . Как известно (см. [1]), $\mathcal{P}(T^*X)^G = \text{gr } \mathcal{D}(X)^G \cong S(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K$. На алгебре $\mathcal{P}(T^*X)^G$ естественным образом определена скобка Пуассона. Можно показать, что она с точностью до знака совпадает со скобкой на $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K \cong S(\mathfrak{g})^K / (S(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$. Здесь $(S(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$ – пуассонов идеал алгебры $S(\mathfrak{g})^K$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Однородное пространство X называется *слабо коммутативным*, если алгебра $\mathcal{P}(T^*X)^G$ (или $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K$) коммутативна относительно скобки Пуассона.

Слабо коммутативные однородные пространства редуктивных групп являются вещественными формами однородных аффинных сферических многообразий, см. [1]. Они классифицированы с точностью до локального изоморфизма в работе [2].

Приведем здесь некоторые свойства слабо коммутативных пространств, доказанные в [1].

Пусть $\mathfrak{k}^0 = (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*$, $\mathfrak{n} = \text{Lie } N$, $\mathfrak{l} = \text{Lie } L$. Однородное пространство $X = G/K$ слабо коммутативно тогда и только тогда, когда для точки общего положения $\alpha \in \mathfrak{k}^0$ выполнено условие:

$$(1) \text{ad}^*(\mathfrak{g})\alpha \cap \mathfrak{k}^0 = \text{ad}^*(\mathfrak{k})\alpha.$$

Пусть $X = G/K$ – односвязное слабо коммутативное пространство связной группы Ли G . Тогда $G = N \rtimes L$, где N – не более чем 2-ступенно нильпотентная односвязная группа Ли, L – связная редуктивная подгруппа группы G , содержащая K , и выполнено условие

$$(i) \mathbb{R}[\mathfrak{n}]^L = \mathbb{R}[\mathfrak{n}]^K.$$

Слабо коммутативные пространства, в которых $L = K$, называются пространствами гейзенбергова типа. В [1] получена их классификация при условии, что представление $K : \mathfrak{n}/\mathfrak{n}'$ неприводимо.

ЛЕММА. Пусть пространство G/K слабо коммутативно и $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \neq 0$. Рассмотрим коммутативную односвязную группу $\tilde{N}$, касательная алгебра которой изоморфна $\mathfrak{n}$ как L -модуль. Тогда однородное пространство $\tilde{G}/K$ группы $\tilde{G} = \tilde{N} \rtimes L$ тоже слабо коммутативно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ определена K -инвариантная биградуировка $S^{n,l}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) = S^n(\mathfrak{n})S^l(\mathfrak{l}/\mathfrak{k})$. Заметим, что если $a \in S^{n,l}$, $b \in S^{n',l'}$ ($a, b \in S(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K$), то

$$\{a, b\} = \{a, b\}_{\mathfrak{l}} + \{a, b\}_{\mathfrak{n}}, \quad \text{где } \{a, b\}_{\mathfrak{l}} \in S^{n+n', l+l'-1}, \quad \{a, b\}_{\mathfrak{n}} \in S^{n+n'-1, l+l'}.$$

Так как K -модули $\mathfrak{g}$ и $\hat{\mathfrak{g}}$ изоморфны, имеем $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K = S(\hat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{k})^K$. Пусть $\hat{a}, \hat{b}$ – биоднородные элементы a, b пространства $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K$, рассматриваемые как элементы алгебры $S(\hat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{k})^K$. Тогда $\{\hat{a}, \hat{b}\} = \{a, b\}_{\mathfrak{l}} = 0$.

Пусть $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ – K -инвариантное разложение. Тогда $\mathfrak{k}^0 = \mathfrak{m}^* \oplus \mathfrak{n}^*$.

Из условия (i) следует, что орбиты групп L и K в $\mathfrak{n}$ совпадают, L -модули $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{n}^*$ изоморфны, и $\text{ad}^*(\mathfrak{k})\gamma = \text{ad}^*(\mathfrak{l})\gamma$ для любой точки $\gamma \in \mathfrak{n}^*$, т.е. $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} + \mathfrak{l}_{\gamma}$. Более того, естественное отображение ограничения $\tau : \mathfrak{l}^* \rightarrow \mathfrak{l}_{\gamma}^*$ (являющееся гомоморфизмом L_{γ} -модулей) задает изоморфизм K_{γ} -модулей $(\mathfrak{l}/\mathfrak{k})^*$ и $(\mathfrak{l}_{\gamma}/\mathfrak{k}_{\gamma})^*$.

ТЕОРЕМА 1. Однородное пространство $X = G/K$ слабо коммутативно тогда и только тогда, когда выполнено условие (i), а также следующие условия:

- (ii) для точки общего положения $\gamma \in \mathfrak{n}^*$ пространство L_γ/K_γ слабо коммутативно;
- (iii) для точки общего положения $\beta \in \mathfrak{m}^*$ пространство $(K_\beta \ltimes N)/K_\beta$ слабо коммутативно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, условие (i) является необходимым. Будем предполагать, что оно выполнено.

($\Leftarrow$) Покажем, как доказывается достаточность указанных условий в случае $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = 0$.

Пусть $\alpha = \beta + \gamma \in \mathfrak{t}^0$, $\beta \in \mathfrak{m}^*$, $\gamma \in \mathfrak{n}^*$. Достаточно доказать, что если условие (1) выполнено для тройки $(L_\gamma, K_\gamma, \beta)$, то оно выполнено и для (G, K, α) .

Пусть $l \in \mathfrak{l}$, $n \in \mathfrak{n}$ и $\text{ad}^*(l+n)\alpha \in \mathfrak{t}^0$. Найдем такой элемент $k \in \mathfrak{k}$, что $\text{ad}^*(l+n-k)\alpha = 0$. Так как $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_\gamma + \mathfrak{k}$, можно считать, что $l \in \mathfrak{l}_\gamma$. Поскольку, кроме того, $\text{ad}^*(n)\beta = 0$, имеем $\text{ad}^*(l+n)\alpha = \text{ad}^*(l)\beta + \text{ad}^*(n)\gamma$. Заметим, что $\text{ad}^*(n)\gamma(\mathfrak{k}_\gamma) \in \text{ad}^*(\mathfrak{k})_\gamma(n) = 0$. Следовательно, $\text{ad}^*(l)\beta(\mathfrak{k}_\gamma) = 0$. Для тройки $(L_\gamma, K_\gamma, \beta)$ выполнено условие (1), т.е.

$$\exists k \in \mathfrak{k}_\gamma: \text{ad}^*(l-k)\beta(\mathfrak{l}_\gamma) = 0.$$

Непосредственным вычислением можно убедиться в том, что элемент k действительно удовлетворяет нашему условию.

Вернемся к конструкции, рассмотренной в лемме. Теперь известно, что пространство $\widehat{G}/K$ слабо коммутативно. Докажем, что тогда из условия (iii) следует слабая коммутативность пространства G/K . Достаточно доказать, что $\{a, b\}_\mathfrak{n} = 0$ для любых двух биоднородных элементов $a, b \in S(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K$. Пусть $\beta \in \mathfrak{m}^*$. Определим отображение

$$\varphi_\beta: S(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \rightarrow S(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})/(\xi - \beta(\xi)) : \xi \in \mathfrak{m} \cong S(\mathfrak{n}).$$

Легко видеть, что $\varphi_\beta(S(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K) \subset S(\mathfrak{n})^{K_\beta}$. Заметим, что для точки общего положения $\beta \in \mathfrak{m}^*$ $\varphi_\beta(\{a, b\}_\mathfrak{n}) = \{\varphi_\beta(a), \varphi_\beta(b)\} = 0$. Следовательно, и $\{a, b\}_\mathfrak{n} = 0$.

($\Rightarrow$) (ii) Достаточно доказать, что если $\beta \in \mathfrak{m}^*$, $\gamma \in \mathfrak{n}^*$ и для точки $\alpha = \beta + \gamma \in \mathfrak{t}^0$ выполнено условие (1), то условие (1) выполнено для тройки $(L_\gamma, K_\gamma, \beta)$.

Можно считать алгебру $\mathfrak{n}$ коммутативной. Пусть $\bar{\beta} \in (\mathfrak{l}_\gamma/\mathfrak{k}_\gamma)^*$, $l \in \mathfrak{l}_\gamma$ и $\text{ad}^*(l)\bar{\beta}(\mathfrak{k}_\gamma) = 0$. Нужно найти такой элемент $k \in \mathfrak{k}_\gamma$, для которого $\text{ad}^*(l)\bar{\beta} = \text{ad}^*(k)\bar{\beta}$. В пространстве $\mathfrak{m}$ существует единственный элемент β , для которого $\tau(\beta) = \bar{\beta}$. Заметим, что $\text{ad}^*(l)\beta|_{\mathfrak{k}} \in (\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_\gamma)^* = \text{ad}^*(n)\gamma|_{\mathfrak{k}}$. Поэтому найдется такой элемент $n \in \mathfrak{n}$, что $\text{ad}^*(l+n)(\beta+\gamma) = \text{ad}^*(l)\beta + \text{ad}^*(n)\gamma \in \mathfrak{t}^0$. Тогда существует элемент $k \in \mathfrak{k}$, для которого $\text{ad}^*(l+n-k)(\beta+\gamma) = 0$. При ограничении на $\mathfrak{l}_\gamma$ имеем: $\text{ad}^*(l+n)(\beta+\gamma)|_{\mathfrak{l}_\gamma} = \text{ad}^*(l)\beta|_{\mathfrak{l}_\gamma} = \text{ad}^*(k)\beta|_{\mathfrak{l}_\gamma}$. Осталось убедиться в том, что $\text{ad}^*(k)\gamma = 0$. Действительно, $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = 0 \Rightarrow (\text{ad}^*(l)\beta + \text{ad}^*(n)\gamma)(\mathfrak{n}) = 0 = \text{ad}^*(k)\gamma(\mathfrak{n}) \Rightarrow \text{ad}^*(k)\gamma = 0$.

(iii) Пусть $\beta \in \mathfrak{m}^*$. Покажем, что алгебра $S(\mathfrak{n})^{K_\beta}$ коммутативна относительно скобки Пуассона. Достаточно доказать, что отображение φ_β сюръективно. Как известно, $S(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]$, $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) = \mathbb{R}[\mathfrak{t}^0]$. Заметим, что $\mathfrak{n}^*//K_\beta \cong (K_\beta \oplus \mathfrak{n}^*)//K \subset \mathfrak{t}^0//K$. Так как орбита K_β замкнута в $\mathfrak{m}^*$, подмножество $(K_\beta \oplus \mathfrak{n}^*)//K$ замкнуто в $\mathfrak{t}^0//K$. Поэтому отображение ограничения $\mathbb{R}[\mathfrak{t}^0]^K \rightarrow \mathbb{R}[K_\beta \oplus \mathfrak{n}^*]^K$, а следовательно, и φ_β сюръективно.

Отметим, что условие (i) равносильно равенству $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_\gamma + \mathfrak{k}$, для точки общего положения $\gamma \in \mathfrak{n}^*$, а группа L_γ — редуктивна. Таким образом, проверка слабой коммутативности сводится к проверке условия (iii). По-видимому, с помощью теоремы 1 можно получить полную классификацию слабо коммутативных пространств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э. Б. Винберг // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 3–62. [2] О. С. Якимова // Вестн. МГУ. Сер. Матем., мех. 2002. № 2 (в печати).