Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Шамолин, Об интегрируемости в трансцендентных функциях, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 3, 209–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm53>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:32:25

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЯХ

М. В. ШАМОЛИН

Как известно, самому понятию интегрируемости придают различные значения в соответствии с тем, в каких функциях производится интегрирование (аналитических, гладких, мероморфных и др.), каким образом понимается смысл интегрируемости [1]. В данной работе обсуждается вопрос интегрируемости систем обыкновенных дифференциальных уравнений в классе трансцендентных функций, т.е. функций, которые после продолжения в комплексную область имеют существенно особые точки.

Понятие интегрируемости в классе трансцендентных функций возникает по причине наличия у системы асимптотических (притягивающих или отталкивающих) предельных множеств, т.е. множеств, окрестности которых состоят из многообразий размерности выше 1, полностью притягиваемых или отталкиваемых данными предельными множествами. Последний факт хорошо иллюстрирует простая

ТЕОРЕМА. *Если система обладает асимптотическими предельными множествами, то она не имеет полного набора непрерывных первых интегралов во всем фазовом пространстве.*

Заметим, что в пространствах размерности выше 2 исключен даже случай грубого седла, поскольку могут существовать целые многообразия коразмерности 1, притягиваемые или отталкиваемые данным седлом. Таким образом, полный набор интегралов может быть разрывен возле многомерных седел. В плоском же случае интегралы являются гладкими функциями возле седла.

В приложениях поиск трансцендентных первых интегралов, как правило, сталкивается с трудностями выражения данных интегралов через элементарные функции, поскольку уже для простой маятниковой системы с параметром μ : $\alpha' = \Omega + \mu \sin \alpha$, $\Omega' = \sin \alpha \cos \alpha$, возникающей в динамике твердого тела, вопрос выражения ее первого интеграла через элементарные функции не совсем тривиален (об ее интегрировании см. [2], [3]). В данном случае при $\mu = 0$ трансцендентный первый интеграл превращается в аналитический первый интеграл физического маятника.

Если система, обладающая асимптотическими предельными множествами, вполне интегрируема (по Якоби), то, как правило, не весь список первых интегралов содержит трансцендентные интегралы. В этом смысле теорема утверждает, что хотя бы один интеграл из списка является трансцендентным. Так, рассмотрим систему с параметром μ

$$(1) \quad \begin{cases} v' = v\Psi(\alpha, \omega), \\ \alpha' = \omega + \mu \sin \alpha \cos^2 \alpha + \mu \omega^2 \sin \alpha, \\ \omega' = -\sin \alpha \cos \alpha - \omega\Psi(\alpha, \omega), \end{cases}$$

где $\Psi(\alpha, \omega) = \mu \sin^2 \alpha \cos \alpha - \mu \omega^2 \cos \alpha$, возникающую в динамике твердого тела [3], [4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Система (1) обладает двумя первыми интегралами, выражающимися через элементарные функции; один интеграл – аналитическая функция, а другой интеграл – трансцендентная.*

Аналитический интеграл системы имеет вид: $v^2(1 + \mu^2 \omega^2 + 2\mu \omega \sin \alpha) = C$, а трансцендентный интеграл выражается достаточно громоздко: если $\tau = \sin \alpha$, $\omega - \tau = u_1$; $\omega + \tau = v_1$; $u_1 = v_1 t_1$; $v_1^2 = p_1$, $p^{-1} = q_1$, $C_1 = 2 - \mu$, $C_2 = \mu$, $C_3 = -2 + \mu$, а также

$$Q(t_1) = \begin{cases} e^{t_1}, & C_1 = 0; \\ e^{\frac{2C_2}{\sqrt{-C_1 C_3}} \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{C_1}{C_3}} t_1}, & C_1 > 0; \\ \left(\frac{\sqrt{-C_1} t_1 + \sqrt{-C_3}}{\sqrt{-C_1} t_1 - \sqrt{-C_3}} \right)^{\frac{C_2}{\sqrt{C_1 C_3}}}, & C_1 < 0, \end{cases}$$

то искомый интеграл имеет вид:

$$Q^{-1}(t_1)q_1(C_1t_1^2 - C_3)^{-1} - 4\mu \int_{t_0}^{t_1} Q^{-1}(\tau_1) \frac{\tau_1}{(C_1\tau_1^2 - C_3)^2} d\tau_1 = C.$$

Приведем пример системы четвертого порядка с параметром μ , имеющую три первых интеграла, из которых один – аналитический, второй – мероморфный, а третий – трансцендентный. Последний факт интересен для теории функций многих комплексных переменных, поскольку такие три типа функций полностью перекрывают классификацию функций по их особым точкам:

$$\begin{cases} \alpha' = -z_2 + \mu \sin \alpha, \\ z_2' = \sin \alpha \cos \alpha - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ z_1' = z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{cases}$$

В заключение отметим, что поскольку разрыв трансцендентных интегралов происходит на асимптотических предельных множествах (т.е. на целых многообразиях), то удастся выяснить наличие в системе предельных циклов. И хотя в последнем случае трансцендентный первый интеграл, как правило, не выражается через элементарные функции, он имеет многообразие изолированных существенно особых точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Козлов В. В. // УМН. 1983. Т. 38. № 1. С. 3–67. [2] Самсонов В. А., Шамолин М. В. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1989. № 3. С. 51–54, 105. [3] Шамолин М. В. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1992. № 2. С. 52–56, 112. [4] Шамолин М. В. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1992. № 1. С. 52–58, 112.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
07.04.1998