Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Дистрибутивные нелокализуемые кольца, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 3, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm530>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:14:08

ДИСТРИБУТИВНЫЕ НЕЛОКАЛИЗУЕМЫЕ КОЛЬЦА

А. А. ТУГАНБАЕВ

Все кольца ассоциативны и с ненулевой единицей. Модуль называется *дистрибутивным*, если решетка всех его подмодулей дистрибутивна. Модуль, у которого все конечно порожденные подмодули циклически, называется *модулем Безу*. Модуль называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению. Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Кольцо называется *инвариантным справа*, если все его правые идеалы являются идеалами. Кольцо A называется *когерентным справа*, если каждый его конечно порожденный правый идеал – конечно представимый A -модуль. Слова типа “дистрибутивное кольцо” означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Для кольца A через $J(A)$, $N_\ell(A)$, $N_r(A)$, $\max(A_A)$ и $\max({}_A A)$ обозначаются радикал Джекобсона, множество всех левых делителей нуля, множество всех правых делителей нуля, множество всех максимальных правых идеалов и множество всех максимальных левых идеалов соответственно. Кольцо A называется *локализуемым справа*, если для любого $M \in \max(A_A)$ существует *правая локализация* A_M (т.е. существуют такое кольцо A_M и кольцевой гомоморфизм $f: A \rightarrow A_M$, что все элементы из $f(A \setminus M)$ обратимы в A_M , $A_M = \{f(a)f(t)^{-1} \mid a \in A, t \in A \setminus M\}$ и $\text{Ker}(f) = \{a \in A \mid (A \setminus M) \cap r_A(a) \neq \emptyset\}$).

ТЕОРЕМА. *Существует инвариантное дистрибутивное равномерное когерентное подпрямо неразложимое кольцо Безу A , которое не является локализуемым справа или слева и обладает следующими свойствами:*

- (1) *в кольце A все регулярные элементы обратимы, пересечение любых двух конечно порожденных правых (левых) идеалов кольца A является главным правым (левым) идеалом, правый (левый) аннулятор любого элемента является главным правым (левым) идеалом и A не изоморфно подкольцу локального кольца;*
- (2) *A содержит такой идеал M , что $M^2 = 0$, A/M – коммутативная область главных идеалов, имеющая ровно два максимальных идеала, M – цепной артинов делимый A -модуль, $M = aM = Ma \subset aA = Aa$ для каждого $a \in A \setminus M$ и M – единственный неглавный правый или левый идеал кольца A ;*
- (3) *$\max(A_A) = \max({}_A A) = \{N_\ell(A), N_r(A)\}$, $A/N_\ell(A)$ и $A/N_r(A)$ – поля, $A/J(A) \cong A/N_\ell(A) \times A/N_r(A)$, $N_\ell(A) \cap N_r(A) = J(A)$, $N_r(A)$ – единственный собственный точный справа идеал и $N_\ell(A)$ – единственный собственный точный слева идеал кольца A .*

Первый пример дистрибутивного кольца, не являющегося локализуемым справа или слева, был недавно построен Г. Е. Пунинским. Элементы из $A \setminus (N_r(A) \cup N_\ell(A))$ называются *регулярными элементами* (в A). Модуль M_A называется *делимым*, если для любого $m \in M$ и каждого регулярного $a \in A$ существует такое $x \in M$, что $m = xa$. Подмножество T кольца A называется *реверсивным справа*, если для любых таких $a \in A$ и $t \in T$, что $ta = 0$, существует такое $u \in T$, что $au = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел, $\mathbb{Q}[i]$ – поле частных кольца целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$ ($i^2 = -1$), φ – такой автоморфизм поля $\mathbb{Q}[i]$, что $q_1 + q_2 i \rightarrow q_1 - q_2 i$, R_1 и R_2 – локализации коммутативной области главных идеалов $\mathbb{Z}[i]$ по простым идеалам, порожденным элементами $2 + i$ и $2 - i$ соответственно. Тогда R_1 и R_2 – коммутативные цепные области главных идеалов. Пусть $R \equiv R_1 \cap R_2$ и X, Y – идеалы кольца R , порожденные элементами $2 + i$ и $2 - i$ соответственно. Коммутативная область главных идеалов R имеет ровно два максимальных идеала X и Y , $R_X = R_1$, $R_Y = R_2$, $\varphi(R_X) = R_Y$, $X + Y = R$, $J(R) = X \cap Y = (2 + i)(2 - i)R = 5R$ и фактор-кольцо $R/J(R)$ изоморфно прямому произведению полей A/X и A/Y . Кольцо R совпадает с множеством всех несократимых рациональных гауссовых дробей, знаменатели которых не делятся ни на $2 + i$, ни на $2 - i$. Пусть M – правый R -модуль $\mathbb{Q}[i]/R_X$. Все собственные подмодули в M_R циклически и образуют бесконечную счетную строго возрастающую цепь $0 = s_0 R \subset s_1 R \subset s_2 R \subset \dots$, где простой модуль $s_1 R$ изоморфен $R/Y = R/(2 - i)R$ и $r_R(s_n) = (2 - i)^n R$ для всех натуральных n .

Мы также превратим M в левый R -модуль по правилу $rm = m\varphi(r)$ для всех элементов $r \in R$ и $m \in M$. Тогда $M - (R, R)$ -бимодуль, являющийся цепным артиновым делимым правым (левым) R -модулем. Пусть A – внешняя прямая сумма абелевых групп R и M с таким умножением, что $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + m_1r_2) = (r_1r_2, m_2\varphi(r_1) + m_1r_2)$ для всех $r_1, r_2 \in R$ и $m_1, m_2 \in M$. Пара $(1, 0)$ является единицей кольца A . Мы отождествляем M , X и Y с идеалами $(0, M)$, $(X, 0)$ и $(Y, 0)$ кольца A соответственно. Кольцо R отождествляется с подкольцом $(R, 0)$ в A . Правые (левые) идеалы кольца A , лежащие в M , совпадают с R -подмодулями в M , $mA = Am$ для любого $m \in M$, $A/J(A)$ изоморфно прямому произведению полей A/X и A/Y , $M^2 = 0$, A/M изоморфно коммутативной области главных идеалов R , M – цепной артинов делимый правый (левый) A -модуль Безу, простой правый (левый) A -модуль s_1A совпадает с As_1 и является наименьшим ненулевым правым (левым) идеалом кольца A , $r_A(s_1) = Y$ и $\ell_A(s_1) = X$. Приведем некоторые свойства кольца A .

(1) $X = (2+i)A = \ell_A(s_1) = N_\ell(A) \in \max(A_A) = \max({}_A A)$ и $Y = (2-i)A = r_A(s_1) = N_r(A) \in \max(A_A) = \max({}_A A)$, $\max(A_A) = \max({}_A A) = \{N_\ell(A), N_r(A)\}$, $N_r(A)$ – единственный собственный точный справа правый (левый) идеал кольца A и $N_\ell(A)$ – единственный точный слева собственный правый (левый) идеал кольца A .

(2) Элемент $(2+i) + (2-i) = 4 = 5 - 1$ обратим в A , так как $5 \in J(A)$. Если $x \equiv (2+i)/4 \in X$, то $1-x = (2-i)/4 \in Y$, $(2+i)s_1 = s_1\varphi(2+i) = s_1(2-i) = 0$, $xs_1 = s_1(1-x) = 0$.

(3) $x \in X \setminus J(A) = X \setminus Y \subseteq N_\ell(A)$, $1-x \in Y \setminus X = Y \setminus J(A) \subseteq N_r(A)$, $J(A)$ содержит не все правые (левые) делители нуля кольца A , правый (левый) аннулятор любого элемента из A – главный правый (левый) идеал.

(4) A/M – коммутативная область главных идеалов, цепной идеал M кольца A сравним по включению с любым правым или левым идеалом из A , $s_1A = As_1 = r(X) = \ell(Y)$ – наименьший ненулевой правый (левый) идеал кольца A и $A \cong A/r(X) = A/\ell(Y)$.

(5) A – инвариантное дистрибутивное равномерное подпрямо неразложимое кольцо Безу, все регулярные элементы кольца A обратимы в A и пересечение любых двух конечно порожденных правых (левых) идеалов кольца A – главный правый (левый) идеал.

(6) A – когерентное кольцо, не изоморфное подкольцу локального кольца.

(7) Множество $A \setminus X$ не реверсивно слева, множество $A \setminus Y$ не реверсивно справа и A не является локализуемым справа или слева кольцом.

Свойства (1)–(3) проверяются непосредственно.

(4) Так как $A/M \cong R$, то A/M – коммутативная область главных идеалов. Так как M – делимый R -модуль, то M сравним по включению с любым правым или левым идеалом из A . Тогда $s_1A = As_1$ – наименьший ненулевой правый (левый) идеал, поскольку $s_1R = Rs_1$ – наименьший подмодуль цепного артинова правого (левого) R -модуля M . Непосредственно проверяется, что $s_1A = As_1 = r(X) = \ell(Y)$ и $A \cong A/r(X) = A/\ell(Y)$.

(5) Так как M – A -модуль Безу и $mA = Am$ для каждого $m \in M$, то по (4) A – инвариантное подпрямо неразложимое кольцо Безу. Тогда A равномерно. Инвариантное кольцо Безу A дистрибутивно по теореме 3.26 из [1]. Пусть t – регулярный элемент. По (1) t не содержится ни в каком максимальном правом или левом идеале. Поэтому $tA = At = A$. Последнее утверждение следует из (4).

(6) Из (5), (3) и [1; 7.2] следует, что A когерентно. Допустим, что существует такое локальное кольцо H , что A – подкольцо в H . По (3) x и $1-x$ не регулярны. Поэтому x и $1-x$ не обратимы в локальном кольце H ; получено противоречие.

(7) По (3) $x \in A \setminus Y$. По (2) $xs_1 = 0$. Так как $r(s_1) \cap (A \setminus Y) = Y \cap (A \setminus Y) = \emptyset$, то $A \setminus Y$ не реверсивно справа. Аналогично, $A \setminus X$ не реверсивно слева. Если A локализуемо справа, то по предложению 5.17 из [1] для любого максимального правого идеала M множество $A \setminus M$ реверсивно справа.

Из приведенных выше рассуждений и свойств вытекает, что A – искомое кольцо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. A. Tuganbaev. Semidistributive Modules and Rings. Dordrecht: Kluwer, 1998.