Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Браверман, О. Милатович, М. А. Шубин, Существенная самосопряженность операторов типа Шрёдингера на многообразиях, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 3–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm532>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:19:32

СУЩЕСТВЕННАЯ САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ОПЕРАТОРОВ
ТИПА ШРЁДИНГЕРА НА МНОГООБРАЗИЯХ

М. БРАВЕРМАН, О. МИЛАТОВИЧ, М. ШУБИН

Получено несколько условий существенной самосопряженности для оператора типа Шрёдингера $H_V = D^*D + V$, где D — эллиптический дифференциальный оператор первого порядка, действующий в пространстве сечений эрмитова векторного расслоения E на многообразии M с положительной гладкой мерой $d\mu$, и V — эрмитов эндоморфизм расслоений. Эти условия выражаются в терминах полноты некоторых метрик на M , естественно ассоциированных с H_V . Наши результаты обобщают теоремы Титчмарша, Сирса, Рофе-Бекетова, Олейника, Шубина и Леша. Априори не предполагается, что M наделено полной римановой метрикой. Это позволяет рассматривать, например, операторы, действующие в ограниченных областях в $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега. Разрешаются также сингулярные потенциалы V . В частности, получено новое условие самосопряженности для оператора Шрёдингера в $\mathbb{R}^n$, потенциал которого имеет особенность кулоновского типа и может стремиться к $-\infty$ на бесконечности.

В специальном случае, когда главный символ оператора D^*D скалярный, установлены более точные результаты для операторов с сингулярными потенциалами. Доказательства этих фактов основаны на усиленном неравенстве Като, которое является модификацией и улучшением результата Хесса, Шрадера и Уленброка.

Библиография: 93 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	4
2. Основные результаты	6
3. Некоторые примеры	11
4. Доказательство первой части теоремы 2.3	15
5. Неравенство Като для лапласиана Бохнера	16
6. Случай, когда носитель потенциала V мал	22
7. Доказательство второй части теоремы 2.3	26
8. Квадратичные формы и существенная самосопряженность оператора H_{V_+}	29
9. Доказательство теоремы 2.7	36
10. Доказательство теоремы 2.13	38
Приложение А. Сглаживатели Фридрихса	38
Приложение В. Положительность	42

Приложение С. Классы Штуммеля и Като	46
Приложение D. Еще об истории	48
Список литературы	54

1. Введение

Спектральная теория дифференциальных операторов имеет свои глубокие корни в нерелятивистской квантовой механике, хотя первые результаты о собственных значениях и собственных функциях значительно старше. Напомним, что, согласно фон Нейману, состояние квантовой системы есть вектор ψ в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (ψ определен с точностью до ненулевого комплексного множителя), тогда как физическая величина есть самосопряженный оператор A в $\mathcal{H}$. Специальная физическая величина H , называемая *энергией* или *гамильтонианом*, отвечает за эволюцию любого заданного состояния, которая задается уравнением Шрёдингера

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (1.1)$$

где система единиц выбрана таким образом, что постоянная Планка равна 1. При заданном начальном условии

$$\psi(0) = \psi_0 \quad (1.2)$$

можно записать

$$\psi(t) = \exp(itH) \psi_0,$$

где экспоненту можно определить при помощи спектральной теоремы, и уравнение (1.1) удовлетворяется в сильном смысле, если мы предположим, что $\psi_0 \in \text{Dom}(H)$.

Конкретные гамильтонианы H берут свое начало из нечетко определенной процедуры, которая применяется к классической системе и называется *квантованием*. Эта процедура приводит к гамильтонианам H , которые обычно являются дифференциальными операторами второго порядка, называемыми операторами Шрёдингера. Однако редко случается, что можно фактически немедленно увидеть, что такой оператор H самосопряжен в естественном L^2 -пространстве. Обычно можно только видеть, что H *симметричен* (или, в несколько иной терминологии, *эрмитов*). Различие между симметрическими и самосопряженными операторами часто игнорируется физиками, даже очень хорошими, но это отличие очень важно. Действительно, для симметрического оператора H решение начальной задачи (1.1)–(1.2) может не существовать, даже если $\psi_0 \in \text{Dom}(H)$. Можно попытаться продолжить оператор H так, чтобы сделать его максимальным оператором (т.е. сделать его определенным на всех таких $\psi \in L^2$, что $H\psi \in L^2$, где $H\psi$ понимается в смысле теории обобщенных функций). Но тогда может случиться так, что решение задачи (1.1)–(1.2) не единственно.

Существование и единственность решения задачи (1.1)–(1.2) гарантированы (для $\psi_0 \in \text{Dom}(H)$) только в том случае, когда H самосопряжен. Однако обычно невозможно немедленно увидеть, какова естественная область определения оператора H .

Исследования М. Шубина частично поддержаны грантом Национального научного фонда DMS 0107796.

Тогда начинают с гладких финитных функций и пытаются выяснить, можно ли оператор H продолжить *единственным способом* до самосопряженного оператора. Если можно, то оператор H называется *существенно самосопряженным*. При слабых ограничениях на регулярность коэффициентов данный факт эквивалентен утверждению о том, что замыкание оператора H с пространства гладких финитных функций совпадает с максимальным оператором. В этом случае имеется единственный естественный самосопряженный оператор, ассоциированный с данным дифференциальным оператором, и эволюция квантовой системы естественным образом корректно определена. По этой причине на существенную самосопряженность часто ссылаются как на *квантовую полноту*.

Из приведенных выше рассуждений ясно, что установление существенной самосопряженности оператора типа Шрёдингера должно быть начальной точкой любого дальнейшего исследования соответствующей квантовой системы, в которой этот оператор служит в качестве гамильтониана. Поэтому фундаментальной задачей математической физики является нахождение точных и эффективных условий существенной самосопряженности.

Задача о существенной самосопряженности операторов типа Шрёдингера изучалась главным образом в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Имеются тысячи работ, посвященных такому изучению, первая из которых (хотя и в другой терминологии) принадлежит Г. Вейлю (1909 г.). Но совершенно осмысленно рассматривать данную задачу в искривленном пространстве или, более общим образом, на многообразиях, особенно на римановых многообразиях. Здесь обычно получается интересное взаимодействие геометрии и анализа, поскольку важную роль может играть геометрия многообразия. Первая работа в этом направлении, в которой была доказана существенная самосопряженность лапласиана на любом полном римановом многообразии, принадлежит Гафни (1954 г.).

В настоящей работе мы попытались разработать подход, который объединяет и распространяет почти все более ранние результаты о существенной самосопряженности операторов типа Шрёдингера в векторных расслоениях на многообразиях. Имеются два типа основных результатов. Важной особенностью результатов первого типа является то, что мы не предполагаем, что риманова метрика задана априори, а строим ее, исходя из оператора. Другая важная особенность состоит в том, что мы следим за траекториями соответствующего классического гамильтониана, что берет свое начало в работах Олейника (1993 г., 1994 г.). Наша работа главным образом инициирована его результатами, а также недавней работой Леша (2000 г.), который распространил результаты и методы Олейника на значительно более общий контекст операторов типа Шрёдингера в сечениях векторных расслоений. Добавляя анизотропность по импульсным переменным, мы, в конце концов, приходим к первым результатам о существенной самосопряженности, которые анизотропны как по пространственным, так и по импульсным переменным, для операторов типа Леша с сингулярным потенциалом в сечениях векторных расслоений.

Второй тип результатов получается при помощи распространения неравенства Като на векторные расслоения, что впервые было сделано Хессом, Шрадером и Уленброком (1980 г.). Однако они установили свои неравенства только для гладких сечений, и это не достаточно для приложений к существенной самосопряженности в случае, когда добавлен негладкий потенциал. Мы исправляем и улучшаем результат Хесса, Шрадера и Уленброка и затем применяем его для того, чтобы перенести результаты

о существенной самосопряженности, ранее известные только для скалярных операторов, на операторы, которые имеют скалярный главный символ.

Одним из основных средств, которое позволяет применить неравенство Като, является положительность ядра Шварца резольвенты лапласиана. На самом деле, необходим немного более сильный результат. Такой результат получен в приложении В, где мы также обсуждаем другие близкие вопросы и формулируем гипотезу, которая, будучи доказана, упростила бы наше доказательство. Эта гипотеза имеет также независимый интерес.

Все основные результаты этой работы фактически являются новыми не только на многообразиях, но и в $\mathbb{R}^n$.

Мы пытались сделать эту работу замкнутой, насколько это возможно. С этой целью мы решили в некоторых случаях повторить рассуждения более старых работ, даже если надо было сделать только небольшие модификации, чтобы получить то, что необходимо для наших целей. Иногда мы сделали это для некоторых заведомо известных результатов, если не имелось легко доступных ссылок. Однако в большинстве случаев мы улучшили изложение, приведенное в старых работах, и перевели их на более современный язык. Наиболее стандартный материал перенесен в приложения.

2. Основные результаты

2.1. Основные предположения. Пусть M – C^∞ -многообразие без края, $\dim M = n$. Мы будем всегда предполагать, что M связно. Мы также будем предполагать, что дана положительная гладкая мера $d\mu$, т.е. в любых локальных координатах $x^1, x^2, \dots, x^n$ имеется такая строго положительная C^∞ -плотность $\rho(x)$, что $d\mu = \rho(x) dx^1 dx^2 \dots dx^n$. Пусть E – любое эрмитово векторное расслоение на M . Обозначим через $L^2(E)$ гильбертово пространство квадратично интегрируемых сечений расслоения E по отношению к скалярному произведению

$$(u, v) = \int_M \langle u(x), v(x) \rangle_{E_x} d\mu(x).$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_x}$ обозначает послойное скалярное произведение.

Пусть F – другое эрмитово векторное расслоение на M . Рассмотрим дифференциальный оператор первого порядка $D: C_c^\infty(E) \rightarrow C_c^\infty(F)$ (здесь C_c^∞ обозначает пространство гладких финитных сечений). Мы предположим, что главный символ оператора D инъективен. Другими словами, D эллиптичен (возможно, переопределен).

Пусть D^* – формально самосопряженный оператор к D , т.е. $D^*: C_c^\infty(F) \rightarrow C_c^\infty(E)$ есть такой дифференциальный оператор, что

$$(Du, v) = (u, D^*v)$$

для любых $u \in C_c^\infty(E)$, $v \in C_c^\infty(F)$.

Главная цель данной статьи состоит в том, чтобы дать достаточное условие существенной самосопряженности оператора

$$H_V = D^*D + V, \tag{2.1}$$

где $V \in L^2_{\text{loc}}(\text{End } E)$ – линейный самосопряженный эндоморфизм расслоений¹, т.е. для любого $x \in M$ оператор $V(x): E_x \rightarrow E_x$ самосопряжен.

Напомним определения минимального и максимального операторов, ассоциированных с дифференциальным выражением H_V . Минимальный оператор $H_{V,\min}$ есть замыкание оператора H_V с исходной области определения $C_c^\infty(E)$, в то время как максимальный оператор можно определить как $H_{V,\max} = (H_{V,\min})^*$. В частности, область определения $\text{Dom}(H_{V,\max})$ оператора $H_{V,\max}$ совпадает с множеством таких сечений $u \in L^2(E)$, что $H_V u \in L^2(E)$ (здесь выражение $H_V u$ понимается в смысле теории обобщенных функций). Тогда доказательство существенной самосопряженности оператора H_V сводится к доказательству того, что $H_{V,\max}$ – симметрический оператор.

Сделаем следующее предположение на V .

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ А. $V = V_+ + V_-$, где

- (i) $V_+(x) \geq 0$, $V_-(x) \leq 0$ как линейные операторы $E_x \rightarrow E_x$ для любого $x \in M$;
- (ii) для любого компакта $K \subset M$ существуют такие положительные постоянные $a_K < 1$ и C_K , что

$$\left(\int_K |V_-|^2 |u|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq a_K \|\Delta_M u\| + C_K \|u\| \text{ для любого } u \in C_c^\infty(M), \quad (2.2)$$

где $|V_-(x)|$ обозначает норму линейного отображения $V_-(x): E_x \rightarrow E_x$, $\Delta_M := d^*d$ – скалярный лапласиан произвольной римановой метрики на M (см. определение 5.4) и $\|\cdot\|$ – норма в $L^2(E)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Условие (2.2) автоматически выполнено, если $V_- \in L^p_{\text{loc}}(\text{End } E)$ с $p \geq n/2$ при $n \geq 5$, $p > 2$ при $n = 4$ и $p = 2$ при $n \leq 3$. (Если K содержится в координатной окрестности, это следует из теоремы IX.28, рассуждений, приведенных в доказательстве теоремы X.15, и теорем X.20, X.21 в [64]. Общий случай можно доказать, используя технику локализации, как это объяснено в [79; § 5.2].) Другая возможность состоит в том, чтобы потребовать, что $V_- \in S_{n,\text{loc}}$, где $S_{n,\text{loc}}$ – локальный класс Штуммеля, см. приложение С.

Предположение А тесно связано с регулярностью сечений, принадлежащих максимальной области определения $\text{Dom}(H_{V,\max})$ оператора H_V . Точнее, имеют место следующие результаты.

ТЕОРЕМА 2.3. (i) *Предположим, что $V \in L^p_{\text{loc}}(\text{End } E)$ с $p > n/2$ при $n \geq 4$ и $p = 2$ при $n \leq 3$. Тогда $\text{Dom}(H_{V,\max}) \subset W^{2,2}_{\text{loc}}(E)$.*

(ii) *Предположим, что V удовлетворяет предположению А и оператор D^*D имеет скалярный главный символ. Тогда $\text{Dom}(H_{V,\max}) \subset W^{1,2}_{\text{loc}}(E)$.*

Заметим, что, благодаря замечанию 2.2, из условия на V в теореме 2.3(i) следует справедливость предположения А для V .

Доказательство теоремы 2.3(i) достаточно просто и дано в разделе 4. Доказательство теоремы 2.3(ii) дано в разделе 7 и основано на обобщении неравенства Като, которое мы получим в разделе 5.

Имея в качестве мотивировки теорему 2.3, мы предлагаем следующую гипотезу (которая не тривиальна даже в случае $M = \mathbb{R}^n$).

¹Предположение о том, что V локально квадратично интегрируемо, необходимо для того, чтобы выполнялось включение $H_V u \in L^2_{\text{loc}}(E)$ для $u \in C_c^\infty(E)$.

ГИПОТЕЗА 2.4. Если V удовлетворяет предположению А, то $\text{Dom}(H_{V,\max}) \subset W_{\text{loc}}^{1,2}(E)$.

Заметим, что из теоремы 2.3 (i) следует, в частности, справедливость данной гипотезы при $n \leq 3$. Кроме того, согласно теореме 2.3 (ii), гипотеза верна, если оператор H_V действует на скалярных функциях (например, если H_V – магнитный оператор Шрёдингера).

Поскольку мы не смогли доказать гипотезу в ее полной общности, мы будем работать в этой статье при дополнительном предположении.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ В. $\text{Dom}(H_{V,\max}) \subset W_{\text{loc}}^{1,2}(E)$ и $\text{Dom}(H_{V_+,\max}) \subset W_{\text{loc}}^{1,2}(E)$.

Прежде чем сформулировать основной результат, мы введем некоторые дополнительные обозначения.

2.5. Метрика, ассоциированная с оператором D . Пусть $\widehat{D}: T^*M \otimes E \rightarrow F$ – морфизм векторных расслоений, определяемый по формуле

$$D(\phi u) = \widehat{D}(d\phi)u + \phi Du, \quad (2.3)$$

где $u \in C^\infty(E)$, $\phi \in C^\infty(M)$ и $\widehat{D}(d\phi)(u)$ отождествляется с $\widehat{D}(d\phi \otimes u)$. Тем самым, $\widehat{D} = -i\sigma(D)$, где $\sigma(D)$ – главный символ оператора D . Заметим, что $\widehat{D}^*(\xi) = -(\widehat{D}(\xi))^*$, где $\xi \in T_x^*M$.

Если $\xi \in T_x^*M$, то $\widehat{D}(\xi)$ определяет линейный оператор $E_x \rightarrow F_x$. Для $\xi, \eta \in T_x^*M$ определим

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{1}{m} \text{Re Tr}((\widehat{D}(\xi))^* \widehat{D}(\eta)), \quad m = \dim E_x, \quad (2.4)$$

где Tr обозначает обычный след линейного оператора. Поскольку D является эллиптическим дифференциальным оператором первого порядка и $\widehat{D}(\xi)$ линеен по ξ , легко проверить, что (2.4) определяет скалярное произведение на T_x^*M . Двойственное скалярное произведение определяет риманову метрику на M , которую мы обозначим через g^{TM} .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Если обозначить $|\xi|_0 = |\widehat{D}(\xi)|$, где $|\widehat{D}(\xi)|$ – обычная норма линейного оператора $\widehat{D}(\xi): E_x \rightarrow F_x$, то $|\xi|_0$ индуцирует норму на T_x^*M . Двойственная к ней норма на $T_x M$ индуцирует финслерову метрику на M . Элементарная линейная алгебра показывает, что для любого $\xi \in T_x^*M$

$$m^{-1/2} |\xi|_0 \leq |\xi| \leq |\xi|_0, \quad (2.5)$$

где $|\cdot|$ – норма, определяемая равенством (2.4).

Будем говорить, что кривая $\gamma: [a, \infty) \rightarrow M$ уходит на бесконечность, если для любого компактного множества $K \subset M$ существует такое $t_K > 0$, что $\gamma(t) \notin K$ для любого $t \geq t_K$. Метрика g^{TM} называется *полной*, если $\int_\gamma ds = \infty$ для любой кривой γ , уходящей на бесконечность. Здесь ds – элемент дуги, соответствующий метрике g^{TM} . Полнота метрики g^{TM} эквивалентна геодезической полноте многообразия M . В частности, условия полноты метрик, соответствующих нормам $|\cdot|_0$ и $|\cdot|$ из замечания 2.6, эквивалентны.

Скажем, что $\int_\gamma \frac{ds}{\sqrt{q}} = \infty$ для функции $q: M \rightarrow \mathbb{R}$, если $\int_\gamma \frac{ds}{\sqrt{q}} = \infty$ для любой кривой γ на M , уходящей на бесконечность.

Основным результатом этой работы является следующая

ТЕОРЕМА 2.7. *Предположим, что потенциал V удовлетворяет предположениям А и В, приведенным выше. Предположим, что $q: M \rightarrow \mathbb{R}$ и выполнены следующие условия:*

- (i) *$q \geq 1$ и функция $q^{-1/2}$ является глобально липшицевой, т.е. существует такая постоянная $L > 0$, что для любых $x_1, x_2 \in M$*

$$|q^{-1/2}(x_1) - q^{-1/2}(x_2)| \leq Ld(x_1, x_2),$$

где d – расстояние, индуцированное метрикой g^{TM} ;

- (ii) *существует такое $\delta \in [0, 1)$, что*

$$\delta D^*D + V \geq -q$$

(в смысле квадратичных форм на $C_c^\infty(E)$);

- (iii) *$\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{q}} = \infty$, где ds – элемент дуги метрики g^{TM} .*

Тогда оператор H_V существенно самосопряжен на $C_c^\infty(E)$.

Доказательство дано в п. 9.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Поскольку мы предполагаем, что $q \geq 1$, из условия (iii) теоремы следует, что метрика g^{TM} полна. Заметим также, что само условие (iii) эквивалентно утверждению о том, что новая метрика $g := q^{-1}g^{TM}$ полна.

Из теоремы 2.7 мы немедленно получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.9. *Предположим, что $V \geq -q$, где $q: M \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет предположениям (i) и (iii) приведенной выше теоремы. Тогда H_V существенно самосопряжен.*

СЛЕДСТВИЕ 2.10. *Если метрика g^{TM} полна, то оператор D^*D существенно самосопряжен.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.11. Заметим, что как пространство $L^2(E)$, так и оператор H_V зависят от выбора меры $d\mu$ на M . Тем не менее, это мера не входит в формулировку следствия 2.9. Поэтому если выполнены условия этого следствия, то оператор $D^*D + V$ будет существенно самосопряжен при любом выборе меры. В частности, M может иметь конечный объем по отношению к этой мере.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.12. Теорема 2.7 покрывает случай некоторых интересных операторов, возникающих в дифференциальной геометрии. В частности, если $D = d: C^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ – дифференциал де Рама, то $D^*D = \Delta_M$ – скалярный лапласиан на M , см. определение 5.4. Более общим образом, мы можем рассмотреть дифференциал де Рама $d: \Omega^j(M) \rightarrow \Omega^{j+1}(M)$ на формах произвольной степени. Пусть d^* – формально сопряженный оператор к d . Положим $D = d + d^*$. Тогда D^*D – оператор Лапласа–Бельтрами на дифференциальных формах, см. [6; §3.6]. Также если $D = \nabla: C^\infty(E) \rightarrow \Omega^1(M, E)$ – ковариантная производная, соответствующая метрической связности на эрмитовом векторном расслоении E (п. 5.2), то D^*D – лапласиан Бохнера на E , см. определение 5.4. Заметим, однако, что упомянутые выше операторы, вообще говоря, отличны от классических операторов, поскольку

они определены при помощи произвольной положительной гладкой меры $d\mu$, которая не обязательно совпадает со стандартной римановой мерой.

Ограничение $\delta < 1$ в условии (ii) теоремы 2.7 является существенным. В п. 3.4 мы приведем пример оператора, который не является существенно самосопряженным, но удовлетворяет условиям теоремы 2.7 при любом $\delta > 1$. К сожалению, мы не знаем, останется ли верна теорема 2.7, если мы позволим $\delta = 1$ в условии (ii). Однако в разделе 10 мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.13. *Предположим, что потенциал V удовлетворяет предположениям А и В. Предположим, что метрика g^{TM} полна и что оператор $H_V = D^*D + V$ полуограничен снизу на $C_c^\infty(E)$. Тогда H_V существенно самосопряжен.*

В случае, когда H_V – магнитный оператор Шрёдингера, действующий на скалярных функциях, этот результат сформулирован в [79]. К сожалению, в случае сингулярных потенциалов там не представлены все детали доказательства. Однако эти детали можно найти в данной работе.

Из теоремы 2.7 немедленно вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ 2.14. *Предположим, что $V \in L_{loc}^2(\text{End } E)$ удовлетворяет предположению А. Предположим, что $V = V_1 + V_2$, где $V_1, V_2 \in L_{loc}^2(\text{End } E)$ таковы, что оператор $\delta D^*D + V_1$ полуограничен снизу на $C_c^\infty(E)$ при некотором $\delta < 1$ и $V_2 \geq -q$, где q удовлетворяет условиям (i) и (iii) теоремы 2.7. Тогда оператор $H_V = D^*D + V$ существенно самосопряжен.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.15. Если мы предположим, что $M = \mathbb{R}^n$ со стандартными метрикой и мерой, $H_V = -\Delta + V$, где Δ – стандартный лапласиан и V – вещественнозначная функция, то условие полуограниченности, приведенное в формулировке следствия 2.14, вытекает из следующего, более явного условия на V_1 : $V_1 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, где $p \geq n/2$ при $n \geq 5$, $p > 2$ при $n = 4$ и $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ при $n \leq 3$. (См. ссылки в замечании 2.2.)

Также достаточно потребовать, чтобы $V_1 \in S_n$ (класс Штуммеля) или $V_1 \in K_n$ (класс Като) – определения и свойства этих классов см. в приложении С.

2.16. Самая недавняя история. Здесь мы приведем ссылки на самые последние работы, которые были нашим источником вдохновения. Дополнительные исторические комментарии см. в приложении D.

Теорема 2.7 обобщает недавние работы Олейника [58] и Шубина [78]. Последний автор рассматривал скалярный магнитный оператор Шрёдингера $H_V = -\Delta_A + V$ на полном римановом многообразии, где $\Delta_A = d_A^*d_A$, A – вещественная достаточно регулярная 1-форма и $d_A u = du + iuA$ – деформированный дифференциал, в то время как $V \in L_{loc}^\infty(M)$. Сохраняя предположение о L_{loc}^∞ , Браверман [7] обобщил работу Олейника на случай операторов Шрёдингера на дифференциальных формах. Позднее Леш [53] заметил, что не обязательно ограничиваться операторами типа лапласиана с изотропными символами. Он рассматривал обобщенный оператор Шрёдингера $H_V = D^*D + V$ на полном римановом многообразии, где D такой же, как и в нашей работе. Он установил следующее достаточное условие существенной самосопряженности оператора H_V .

ТЕОРЕМА 2.17 (Леш). *Предположим, что M – полное риманово многообразие. Предположим, что $V \in L_{loc}^\infty(\text{End } E)$ и $V \geq -q$, где $q \geq 1$ – локально липшицева*

функция. Положим

$$c(x) := \max\{1, \sup\{|\widehat{D}(x, \xi)| : |\xi|_{T_x^*M} \leq 1\}\}.$$

Если

- (i) существует такая постоянная $C > 0$, что $c(x)|dq^{-1/2}(x)| \leq C$ для любого $x \in M$,

и

(ii) $\int^\infty \frac{1}{c\sqrt{q}} ds = \infty$,

то H_V существенно самосопряжен.

Заметим, что теорема 2.7 априори не предполагает, что M – риманово многообразие. Важнее то, что в то время как Леш использует функцию $c(x)$, которая строится изотропным образом (беря супремум по всем $|\xi| = 1$, $\xi \in T^*M$), мы более эффективно используем символ $\widehat{D}$, вводя в рассмотрение метрику g^{TM} . В п. 3.1 мы построим явный оператор, для которого теорема 2.7 гарантирует существенную самосопряженность, в то время как теорема Леша не дает никакого заключения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.18. Леш [53] рассматривал более общий случай, когда оператор D не эллиптический, но удовлетворяет следующему условию: если $u \in \text{Dom}(H_{V, \max})$, то $Du \in L^2_{\text{loc}}(F)$. (Из теоремы 2.7 следует, что это условие автоматически выполняется, если D эллиптический и V достаточно регулярный, например, $V \in L^p_{\text{loc}}(\text{End } E)$, где p такое же, как в теореме 2.3(i).) Теорема 2.7 также может быть распространена на неэллиптический случай.

2.19. Благодарности. Авторы благодарны Дэйвису (E. V. Davies), А. Григорьяну, Хебею (E. Hebey) и И. Вербицкому за полезные обсуждения.

3. Некоторые примеры

3.1. Пример: оператор с анизотропным символом. Мы укажем пример оператора с анизотропным символом (функцией на T^*M , зависящей не только от нормы ковектора, но и от его направления). Используя следствие 2.10, мы докажем существенную самосопряженность этого оператора. Этот результат нельзя получить из “изотропных оценок” работ [58], [78] и [53].

Пусть $M = \mathbb{R}^2$ со стандартными метрикой и мерой и $V = 0$. Рассмотрим оператор

$$D = \begin{pmatrix} a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \\ b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix},$$

где a, b – гладкие вещественнозначные нигде не обращающиеся в нуль функции в $\mathbb{R}^2$. Он эллиптический (переопределен). Мы интересуемся оператором

$$H := D^*D = -\frac{\partial}{\partial x} \left(a^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(b^2 \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Матрица скалярного произведения на T^*M , определяемого оператором D по формуле (2.4), равна $\text{diag}(a^2/2, b^2/2)$. Матрица соответствующей римановой метрики

g^{TM} на M равна $\text{diag}(2a^{-2}, 2b^{-2})$, т.е. сама метрика равна $ds^2 = 2a^{-2}dx^2 + 2b^{-2}dy^2$. Согласно следствию 2.10, для того чтобы доказать, что оператор H существенно самосопряжен, достаточно показать, что метрика g^{TM} полна, т.е. что

$$\int_0^\infty ds = \infty, \quad \text{где } ds\text{-элемент длины дуги, ассоциированный с } g^{TM}. \quad (3.1)$$

Пусть $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, \infty)$, — кривая в $\mathbb{R}^2$, уходящая на бесконечность, см. п. 2.5. Тогда условие полноты (3.1) можно записать в виде

$$\int_0^\infty \frac{|x'(t)|}{a} dt + \int_0^\infty \frac{|y'(t)|}{b} dt = \infty.$$

Цель данного примера состоит в том, чтобы показать, что последнее условие может выполняться даже в том случае, когда интеграл, стоящий в левой части условия (ii) теоремы 2.17, сходится. Грубо говоря, мы хотели бы построить пример, в котором хотя бы один из интегралов от функций $1/a$ и $1/b$ велик, в то время как интеграл от $1/\sqrt{a^2 + b^2}$ мал. Этого можно достичь, например, следующим образом. Определим

$$\begin{aligned} a(x, y) &= (1 - \cos(2\pi e^x))x^2 + 1, \\ b(x, y) &= (1 - \sin(2\pi e^y))y^2 + 1. \end{aligned}$$

Покажем, что при таком выборе функций a, b оператор H существенно самосопряжен. Пусть $\gamma(t)$ как выше. Тогда существует такая числовая последовательность $t_n \in [0, \infty)$, что либо $x(t_n) \rightarrow \infty$, либо $y(t_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Предположим, что $x(t_n) \rightarrow \infty$ (другой случай рассматривается подобным образом). Тогда

$$\int_0^{t_n} \frac{|x'(t)|}{a} dt \geq \int_0^{x(t_n)} \frac{dx}{a}.$$

Следовательно, полагая $n \rightarrow \infty$, мы получаем

$$\int_0^\infty \frac{|x'(t)|}{a} dt \geq \int_0^\infty \frac{dx}{a}.$$

Таким образом, для того чтобы удовлетворить условию (3.1), достаточно иметь

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a} = \infty.$$

Обозначим через r_k решения уравнения $\cos(2\pi e^x) = 1$, т.е. $r_k = \ln k$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда существует такой интервал I_k вокруг r_k , что $1 - \cos(2\pi e^x) \leq x^{-2}$, т.е. что $|\sin(\pi e^x)| \leq (\sqrt{2}x)^{-1}$ для любого $x \in I_k$. Заметим, что

$$\frac{1}{a(x, y)} \geq \frac{1}{2} \quad \text{для любого } x \in I_k. \quad (3.2)$$

Для того чтобы оценить длину интервала I_k сверху, заметим, что для любого $h > 0$

$$|\sin(\pi e^{r_k+h})| = |\sin(\pi e^{r_k+h} - \pi e^{r_k})| \leq \pi e^{r_k}(e^h - 1).$$

Таким образом, I_k включает, в частности, все числа вида $r_k + h$ с $0 < h < 1/2$ такие, что $\pi e^{r_k}(e^h - 1) < \frac{1}{\sqrt{2}(r_k + h)}$. Ясно, что $h < r_k$ при $k \geq 2$. Поэтому при $k \geq 2$ интервал I_k содержит все числа вида $r_k + h$ такие, что $0 < h < 1/2$ и $\pi e^{r_k}(e^h - 1) < \frac{1}{2\sqrt{2}r_k}$. Заметим также, что $h < e^h - 1 < 2h$, если $0 < h < 1/2$. Следовательно, I_k содержит все числа вида $r_k + h$ с $0 < h \leq \frac{1}{4\sqrt{2}\pi(\ln k)k}$. Поэтому длина интервала I_k больше, чем $\frac{1}{4\sqrt{2}\pi(\ln k)k}$. Ввиду (3.2) отсюда следует, что для любого $x_0 > 0$ существует такое k_0 , что

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{(1 - \cos(2\pi e^x))x^2 + 1} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{2}\pi(\ln k)k} = \infty.$$

Таким образом, согласно следствию 2.10, оператор $H = D^*D$ существенно самосопряжен.

Заметим, что теорема Леша здесь не дает никакого заключения. Действительно, функция c , используемая Лешем (см. теорему 2.17), задается формулой

$$c = \max\{1, \sup\{|a\xi_1 + b\xi_2| : \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq 1\}\} = \max\{1, \sqrt{a^2 + b^2}\}.$$

Рассмотрим кривую $\gamma(t) = (t, t)$. Тогда в точке $\gamma(t)$ мы имеем $a^2 + b^2 \geq (3 - 2\sqrt{2})t^4$, и условие (ii) теоремы Леша 2.17, очевидно, нарушается.

3.2. Пример: оператор в ограниченной области. Рассмотрим квадрат $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$. Пусть

$$D = \begin{pmatrix} (1 - x^2) \frac{\partial}{\partial x} \\ (1 - y^2) \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Из следствия 2.10 мы немедленно видим, что оператор

$$H := D^*D = -\frac{\partial}{\partial x} \left((1 - x^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left((1 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

существенно самосопряжен.

3.3. Пример: потенциал кулоновского типа. Рассмотрим $M = \mathbb{R}^{3N}$ и $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ из $\mathbb{R}^3$ – ортогональные координаты для $\mathbb{R}^{3N}$. Пусть

$$H = -\sum_{i=1}^N \Delta_i - \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\mathbf{x}_i|} + \sum_{i < j}^N \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} + V(x), \quad (3.3)$$

где Δ_i – лапласиан, соответствующий координатам $\mathbf{x}_i$ и $V(x)$ – локально ограниченный потенциал, удовлетворяющий следующему условию: существует такая функция $q(x) \geq 1$, что функция $q^{-1/2}(x)$ глобально липшицева и

$$V(x) \geq -q(x), \quad \int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{q}} = \infty. \quad (3.4)$$

Тогда, согласно следствию 2.14 и замечанию 2.15, H существенно самосопряжен. Действительно, члены $|\mathbf{x}_i|^{-1}$ и $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^{-1}$ мажорируются лапласианом в $\mathbb{R}^{3N}$ как в операторном смысле, так и в смысле квадратичных форм. Это можно доказать или “разделением переменных”, как в классической работе Като [46], или при помощи классов Штуммеля и Като – см. пример С.2 в приложении С для классов Штуммеля (соответствующие рассуждения можно дословно повторить для классов Като). Заметим, что ни один из этих членов не принадлежит $L^{3N/2}(\mathbb{R}^{3N})$, исключая случай $N = 1$.

Чтобы дать более конкретный пример, мы можем положить $V(x) = -|x|^2$ в (3.3) и утверждать, что оператор

$$-\sum_{i=1}^N \Delta_i - \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\mathbf{x}_i|} + \sum_{i < j}^N \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} - \sum_{i=1}^N |\mathbf{x}_i|^2$$

существенно самосопряжен (этот факт также следует из результата Кальфа [39]). Более общим образом, оператор (3.3) существенно самосопряжен, если существует такая локально ограниченная функция $r: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, что $r^{-1/2}$ глобально липшицева и

$$V(x) \geq -r(|x|), \quad \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{r(t)}} = \infty. \quad (3.5)$$

В качестве примера мы можем взять $V(x) = -|x|^2 \ln(1 + |x|)$.

Заметим, что мы можем также рассмотреть потенциалы, которые удовлетворяют условию (3.4), но не удовлетворяют условию (3.5). Конструкции богатых семейств таких потенциалов могут быть найдены в [68] и [58]. Заметим, что самосопряженность операторов вида (3.3) в данном случае не может быть установлена методом работы [39].

3.4. Пример: оператор, который не существенно самосопряжен. В этом пункте мы приведем пример оператора, который не является существенно самосопряженным, но который удовлетворяет условиям теоремы 2.7 с любым $\delta > 1$.

Рассмотрим оператор $D: C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R})$, где $D = \frac{d}{dx} + |x|^\alpha$ с $\alpha > 3$. Тогда $D^* = -\frac{d}{dx} + |x|^\alpha$, и, следовательно,

$$D^*D = -\frac{d^2}{dx^2} - \alpha|x|^{\alpha-1} \operatorname{sign} x + |x|^{2\alpha}.$$

Пусть $V = -|x|^{2\alpha}$ и $H_V = D^*D + V$. Тогда

$$H_V = -\frac{d^2}{dx^2} - \alpha|x|^{\alpha-1} \operatorname{sign} x.$$

Этот оператор *не является существенно самосопряженным*, поскольку $\alpha - 1 > 2$ (см. пример 1.1 в разделе 3.1 книги [5]). Тем не менее при любом $\delta > 1$

$$\delta D^*D + V = -\delta \frac{d^2}{dx^2} - \delta \alpha|x|^{\alpha-1} \operatorname{sign} x + (\delta - 1)|x|^{2\alpha}.$$

Поскольку $2\alpha > \alpha - 1$ и $\delta - 1 > 0$, существует такое $C_\delta > 0$, что $-\delta\alpha|x|^{\alpha-1}\operatorname{sign} x + (\delta - 1)|x|^{2\alpha} > -C_\delta$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\delta D^*D + V > -C_\delta$.

Мы заключаем, что оператор $\delta D^*D + V$ полуограничен снизу для любого $\delta > 1$. Поэтому теорема 2.7 не верна с $\delta > 1$.

4. Доказательство первой части теоремы 2.3

В этом разделе предположения на потенциал такие, как в условиях теоремы 2.3 (i).

ЛЕММА 4.1. *Для любого $u \in \operatorname{Dom}(H_{V,\max})$ мы имеем $Vu \in L^2_{\text{loc}}(E)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $u \in \operatorname{Dom}(H_{V,\max})$, т.е. $u \in L^2(E)$ и

$$D^*Du + Vu = f \in L^2(E). \quad (4.1)$$

Определим $t_1 := 2$. Поскольку $V \in L^p_{\text{loc}}(\operatorname{End} E)$, из неравенства Гёльдера следует, что $Vu \in L^{s_1}_{\text{loc}}(E)$, где

$$\frac{1}{s_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{p}.$$

Понятно, что $1 \leq s_1 < 2$. Более того, если $n > 3$, то $p > 2$ и $s_1 > 1$.

Теперь мы можем улучшить s_1 следующим образом. Отметим, что из (4.1) следует $D^*Du = f - Vu = h \in L^{s_1}_{\text{loc}}(E)$. Если $s_1 > 1$, то, согласно стандартным результатам об эллиптической регулярности (см. [87; раздел 6.5]), мы получаем $u \in W^{2,s_1}_{\text{loc}}(E)$. Поэтому, используя теорему вложения Соболева (см. [1; теорема 5.4] или [50; теорема 4.5.8]), мы заключаем, что $u \in L^{t_2}_{\text{loc}}(E)$, где

$$\frac{1}{t_2} = \frac{1}{s_1} - \frac{2}{n} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{p} - \frac{2}{n},$$

и затем, согласно неравенству Гёльдера, что $Vu \in L^{s_2}_{\text{loc}}(E)$, где

$$\frac{1}{s_2} = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{p} = \frac{1}{s_1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{s_1} - \frac{2}{n} \left(1 - \frac{n}{2p}\right).$$

Мы можем продолжать таким образом, получая последовательность включений $u \in L^{t_k}_{\text{loc}}(E)$, $Vu \in L^{s_k}_{\text{loc}}(E)$, $k = 1, 2, \dots$, с

$$\frac{1}{t_{k+1}} = \frac{1}{s_k} - \frac{2}{n}, \quad \frac{1}{s_{k+1}} = \frac{1}{s_k} - \frac{2}{n} \left(1 - \frac{n}{2p}\right),$$

до тех пор, пока на некотором шаге мы не получим неравенство $s_k > 2$, которое делает следующий шаг невозможным ввиду члена $f \in L^2(E)$ в (4.1). Тогда мы можем заключить, что $Vu \in L^2_{\text{loc}}(E)$, как и требовалось.

Теперь предположим, что $n \leq 3$, поэтому $p = 2$ и на начальном шаге мы имеем только $Vu \in L^1_{\text{loc}}(E)$. Согласно другой теореме вложения Соболева (см. [1; теорема 5.4, случай C]), мы имеем $W^{1,q}_{\text{loc}}(E) \subset C(E)$ при условии, что $q > n$ (здесь $C(E)$ обозначает множество непрерывных сечений расслоения E). Используя стандартные рассуждения, основанные на двойственности (см. [1; разделы 3.6–3.13]), мы получим $L^1_{\text{loc}}(E) \subset W^{-1,q'}_{\text{loc}}(E)$, если $1 < q' < n/(n-1)$. Поэтому $D^*Du \in W^{-1,\tilde{q}}_{\text{loc}}(E)$, где

$\tilde{q} = \min\{q', 2\}$. Из стандартных результатов об эллиптической регулярности (см. [87; гл. 6.5]) мы получаем $u \in W_{\text{loc}}^{1, \tilde{q}}(E)$. В частности, $u \in L_{\text{loc}}^{\tilde{q}}(E)$ для такого $\tilde{q}$. Поскольку $\tilde{q} > 1$, мы можем рассуждать так же, как и в первой части доказательства, приходя к тому же заключению, что $Vu \in L_{\text{loc}}^2(E)$.² Лемма доказана.

4.2. Доказательство теоремы 2.3 (i). Если $u \in D(H_{V, \max})$, то $D^*Du = H_V u - Vu \in L_{\text{loc}}^2(E)$. Согласно эллиптической регулярности, $u \in W_{\text{loc}}^{2,2}(E)$. Теорема доказана.

5. Неравенство Като для лапласиана Бохнера

В этом разделе мы докажем обобщение неравенства Като на случай лапласиана Бохнера на многообразии M , наделенном римановой метрикой $g = g^{TM}$ и мерой $d\mu = \rho dx$. Здесь dx обозначает форму риманова объема на M и $\rho: M \rightarrow (0, \infty)$ – гладкая функция.

В качестве первого шага мы установим “гладкую версию” неравенства Като, см. предложение 5.9. В случае, когда $d\mu$ есть форма риманова объема на M , аналогичное неравенство было доказано Хессом, Шрадером и Уленброком [35]. Затем в п. 5.15 мы докажем “ L_{loc}^1 ”-версию неравенства Като.

5.1. Двойственность на пространстве форм со значениями в расслоении. Пусть E – эрмитово векторное расслоение на M и $\overline{E}$ обозначает расслоение, комплексно сопряженное к расслоению E . Оно идентично расслоению E , но наделено умножением на $\lambda \in \mathbb{C}$, определенным как умножение на $\overline{\lambda}$. Тожественное отображение $E \rightarrow \overline{E}$ называется комплексным сопряжением и определяет антилинейный изоморфизм $E \xrightarrow{\sim} \overline{E}$. Образ вектора $v \in E_x$ при этом изоморфизме обозначается через $\overline{v}$. Эрмитова структура на E определяет комплексное линейное отображение

$$\langle \cdot \rangle: E \otimes \overline{E} \rightarrow \mathbb{C}, \quad a \otimes \overline{b} \mapsto \langle a \otimes \overline{b} \rangle := \langle a, b \rangle. \quad (5.1)$$

Пусть $\Lambda^i = T^*M \wedge \cdots \wedge T^*M$ – i -я внешняя степень кокасательного расслоения к M . Пространство гладких сечений тензорного произведения $\Lambda^i \otimes E$ называется пространством E -значных дифференциальных i -форм на M и обозначается через $\Omega^i(M, E)$. Отображение (5.1) естественно продолжается до отображений

$$\langle \cdot \rangle: \Lambda^k \otimes E \otimes \overline{E} \rightarrow \Lambda^k, \quad \langle \cdot \rangle: \Omega^k(M, E \otimes \overline{E}) \rightarrow \Omega^k(M, \mathbb{C}).$$

Если $\alpha \in \Omega^i(M, E)$, $\beta \in \Omega^j(M, E)$, то $\overline{\beta} \in \Omega^j(M, \overline{E})$, $\alpha \wedge \overline{\beta} \in \Omega^{i+j}(M, E \otimes \overline{E})$ и $\langle \alpha \wedge \overline{\beta} \rangle \in \Omega^{i+j}(M, \mathbb{C})$. Если одна из форм α, β принадлежит пространству $\Omega^0(M, E) \equiv C^\infty(E)$, то мы будем опускать “ $\wedge$ ” в обозначениях и писать просто $\langle \alpha \overline{\beta} \rangle$.

Пусть $*$: $\Lambda^i \rightarrow \Lambda^{n-i}$ – $\star$ -оператор Ходжа, см. [89]. Этот оператор естественно продолжается на пространства $\Lambda^i \otimes E$ и $\Omega^i(M, E)$.

Формула

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{\Lambda^i \otimes E} := *^{-1} \langle \alpha \wedge * \overline{\beta} \rangle \in \Lambda^0 \cong \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \Lambda^i \otimes E, \quad i = 0, \dots, n,$$

²Заметим, что для того чтобы применить эллиптическую регулярность к уравнению $D^*Du = f \in W_{\text{loc}}^{-1,t}(E)$, мы должны иметь $t > 1$. Если $t = 1$, то из последнего уравнения не следует, что $u \in W_{\text{loc}}^{1,t}(E)$, см. [36; теорема 7.9.8]. Этот факт также является причиной того, что нам необходимо начинать доказательство леммы с доказательства включения $Vu \in L_{\text{loc}}^t(E)$ с $t > 1$.

определяет невырожденное эрмитово скалярное произведение на $\Lambda^i \otimes E$, и мы обозначим

$$|\alpha| := \langle \alpha, \alpha \rangle_{\Lambda^i \otimes E}^{1/2}.$$

Заметим, что если $\alpha, \beta \in \Lambda^0 \otimes E \cong E$, то $\langle \alpha, \beta \rangle_{\Lambda^i \otimes E}$ совпадает с первоначальным эрмитовым скалярным произведением $\langle \alpha, \beta \rangle$ на E .

Аналогично, для $\alpha, \beta \in \Omega^i(M, E)$ определены $\langle \alpha, \beta \rangle_{\Lambda^i \otimes E} \in C^\infty(M)$ и $|\alpha| \in C(M)$.

5.2. Ковариантная производная и двойственный к ней оператор. Пусть ∇ – связность на E . Она определяет такое линейное отображение $\nabla: \Omega^*(M, E) \rightarrow \Omega^{*+1}(M, E)$, что

$$\nabla(\omega \wedge \beta) = d\omega \wedge \beta + (-1)^i \omega \wedge \nabla\beta, \quad \omega \in \Omega^i(M), \quad \beta \in \Omega^j(M, E).$$

В этой работе мы будем всегда предполагать, что ∇ является эрмитовой связностью, т.е. что выполняется следующее равенство:

$$d\langle \alpha \wedge \bar{\beta} \rangle = \langle \nabla\alpha \wedge \bar{\beta} \rangle + (-1)^i \langle \alpha \wedge \bar{\nabla\beta} \rangle, \quad \alpha \in \Omega^i(M, E), \quad \beta \in \Omega^j(M, E), \quad (5.2)$$

где $d: \Omega^*(M, \mathbb{C}) \rightarrow \Omega^{*+1}(M, \mathbb{C})$ – дифференциал де Рама.

Пусть $\Omega_{\text{comp}}^i(M, E)$, $i = 0, 1, \dots, n$, обозначает пространство финитных дифференциальных форм. Рассмотрим скалярное произведение на пространстве $\Omega_{\text{comp}}^i(M, E)$, определяемое по формуле

$$(\alpha, \beta) = \int_M \langle \alpha, \beta \rangle_{\Lambda^i \otimes E} d\mu = \int_M \langle \alpha \wedge * \bar{\beta} \rangle \rho, \quad \alpha, \beta \in \Omega_{\text{comp}}^i(M, E).$$

Пусть $\nabla^*: \Omega^*(M, E) \rightarrow \Omega^{*-1}(M, E)$ обозначает оператор, формально самосопряженный к ∇ , т.е. мы имеем $(\nabla\alpha, \beta) = (\alpha, \nabla^*\beta)$ для любых $\alpha, \beta \in \Omega_{\text{comp}}^*(M, E)$.

ЛЕММА 5.3. *Предположим, что $\beta \in \Omega^j(M, E)$. Тогда*

$$\nabla^*\beta = (-1)^j *^{-1} \nabla * \beta + (-1)^j *^{-1} \frac{d\rho}{\rho} \wedge * \beta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\alpha \in \Omega_{\text{comp}}^{j-1}(M, E)$. Используя (5.2), мы получим

$$\begin{aligned} (\nabla\alpha, \beta) &= \int_M \langle \nabla\alpha \wedge * \bar{\beta} \rangle \rho \\ &= \int_M d\langle \alpha \wedge * \bar{\beta} \rangle - (-1)^{j-1} \int_M \langle \alpha \wedge d\rho \wedge * \bar{\beta} \rangle - (-1)^{j-1} \int_M \langle \alpha \wedge \bar{\nabla} * \bar{\beta} \rangle \\ &= (-1)^j \int_M \left\langle \alpha \wedge *^{-1} \left(\frac{d\rho}{\rho} \wedge * \bar{\beta} \right) \right\rangle \rho + (-1)^j \int_M \langle \alpha \wedge *^{-1} \bar{\nabla} * \bar{\beta} \rangle \rho \\ &= (-1)^j \left(\alpha, *^{-1} \nabla * \beta + *^{-1} \frac{d\rho}{\rho} \wedge * \beta \right), \end{aligned}$$

где в третьем равенстве мы использовали тот факт, что $\int_M d\langle \alpha \wedge * \bar{\beta} \rangle = 0$ по формуле Стокса. Лемма доказана.

Для того чтобы упростить обозначения, обозначим $A_\rho \beta = *^{-1} \frac{d\rho}{\rho} \wedge * \beta$. Тогда

$$\nabla^* = (-1)^j *^{-1} \nabla * + (-1)^j A_\rho : \Omega^j(M, E) \rightarrow \Omega^{j-1}(M, E). \quad (5.3)$$

В частном случае, когда $E = M \times \mathbb{C}$ – тривиальное линейное расслоение, мы получим

$$d^* = (-1)^j *^{-1} d * + (-1)^j A_\rho : \Omega^j(M) \rightarrow \Omega^{j-1}(M). \quad (5.4)$$

В данной работе мы будем использовать формулы (5.3) и (5.4) только в случае, когда $j = 1$. Очевидно, что для $\alpha \in \Omega^0(M, E)$, $\beta \in \Omega^j(M, E)$, $\phi \in C^\infty(M)$ мы имеем

$$A_\rho \langle \alpha \bar{\beta} \rangle = \langle \alpha A_\rho \bar{\beta} \rangle, \quad A_\rho(\phi \beta) = \phi A_\rho \beta. \quad (5.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4. *Лапласианом Ботнера* называется оператор $\nabla^* \nabla : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(E)$. Аналогично определим лапласиан $\Delta_M = d^* d : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$.

Заметим, что если $d\mu$ – форма риманова объема на M , то $\Delta_M = -\Delta_g$, где Δ_g – метрический лапласиан, $\Delta_g u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. В п. 2.5 мы ввели метрику g^{TM} , ассоциированную с эллиптическим дифференциальным оператором первого порядка D . Легко проверить, что для оператора $D = \nabla : C^\infty(E) \rightarrow \Omega^1(M, E)$ эта метрика совпадает с метрикой g , которая, как мы сейчас предполагаем, задана априори.

5.6. Неравенство Като. Напомним, что обобщенная функция ν на M называется положительной (обозначение $\nu \geq 0$), если для любой неотрицательной функции $\phi \in C_c^\infty(M)$ мы имеем $(\nu, \phi) \geq 0$. Отсюда следует, что ν является, на самом деле, положительной мерой Радона (см., например, [31; теорема 1, раздел 2, гл. II]). Будем писать $\nu_1 \geq \nu_2$, если $\nu_1 - \nu_2 \geq 0$.

Основным результатом этого раздела является следующая

ТЕОРЕМА 5.7. *Предположим, что $u \in L_{\text{loc}}^1(E)$ и $\nabla^* \nabla u \in L_{\text{loc}}^1(E)$. Тогда*

$$\Delta_M |u| \leq \operatorname{Re} \langle \nabla^* \nabla u, \operatorname{sign} u \rangle, \quad (5.6)$$

где

$$\operatorname{sign} u(x) = \begin{cases} \frac{u(x)}{|u(x)|}, & \text{если } u(x) \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Особо подчеркнем тот факт, что наши лапласианы являются *положительными* операторами. Это объясняет несоответствие между (5.6) и стандартной формой неравенства Като для скалярных функций в $\mathbb{R}^n$, см., например, теорему X.27 в [64].

Оставшаяся часть этого раздела посвящена доказательству теоремы 5.7.

5.8. Неравенство Като в C^∞ -случае. Пусть $u \in C^\infty(E)$. Для $\epsilon > 0$ положим

$$|u|_\epsilon = (|u|^2 + \epsilon^2)^{1/2}. \quad (5.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.9. *Предположим, что $u \in C^\infty(E)$. Тогда имеет место следующее неравенство:*

$$|u|_\epsilon \Delta_M |u|_\epsilon \leq \operatorname{Re} \langle \nabla^* \nabla u, u \rangle. \quad (5.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $u \in C^\infty(E)$. Используя (5.2), получим

$$\begin{aligned} 2|u|_\epsilon d|u|_\epsilon &= d|u|_\epsilon^2 = d|u|^2 = d\langle u, u \rangle = \langle (\nabla u) \bar{u} \rangle + \langle u (\overline{\nabla u}) \rangle \\ &= 2 \operatorname{Re} \langle (\nabla u) \bar{u} \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle u \overline{\nabla u} \rangle, \end{aligned} \quad (5.9)$$

и, следовательно,

$$|u|_\epsilon |d|u|_\epsilon| \leq |u| |\nabla u|.$$

Поскольку $|u|_\epsilon \geq |u|$, из приведенного выше неравенства следует, что

$$|d|u|_\epsilon| \leq |\nabla u|. \quad (5.10)$$

Кроме того, используя (5.5), получаем

$$\begin{aligned} d^* (|u|_\epsilon d|u|_\epsilon) &= - *^{-1} d * (|u|_\epsilon d|u|_\epsilon) - |u|_\epsilon A_\rho d|u|_\epsilon \\ &= - *^{-1} d(|u|_\epsilon * d|u|_\epsilon) - |u|_\epsilon A_\rho d|u|_\epsilon \\ &= - *^{-1} (d|u|_\epsilon \wedge * d|u|_\epsilon) - |u|_\epsilon *^{-1} d * d|u|_\epsilon - |u|_\epsilon A_\rho d|u|_\epsilon \\ &= -|d|u|_\epsilon|^2 - |u|_\epsilon (*^{-1} d * + A_\rho) d|u|_\epsilon \\ &= -|d|u|_\epsilon|^2 + |u|_\epsilon \Delta_M |u|_\epsilon. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} d^* \langle u \overline{\nabla u} \rangle &= - *^{-1} d * \langle u \overline{\nabla u} \rangle - A_\rho \langle u \overline{\nabla u} \rangle \\ &= - *^{-1} d \langle u * \overline{\nabla u} \rangle - \langle u A_\rho \overline{\nabla u} \rangle \\ &= - *^{-1} \langle \nabla u \wedge * \overline{\nabla u} \rangle - *^{-1} \langle u \overline{\nabla * \nabla u} \rangle - \langle u A_\rho \overline{\nabla u} \rangle \\ &= -|\nabla u|^2 + \langle u \overline{\nabla^* \nabla u} \rangle. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Из (5.9), (5.11) и (5.12) получаем равенство

$$-|d|u|_\epsilon|^2 + |u|_\epsilon \Delta_M |u|_\epsilon = -|\nabla u|^2 + \operatorname{Re} \langle u \overline{\nabla^* \nabla u} \rangle = -|\nabla u|^2 + \operatorname{Re} \langle (\nabla^* \nabla u) \bar{u} \rangle,$$

из которого, ввиду (5.10), следует (5.8). Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 5.10. *Предположим, что $u \in C^\infty(E)$. Тогда справедливо следующее неравенство для обобщенных функций:*

$$\Delta_M |u| \leq \operatorname{Re} \langle \nabla^* \nabla u, \operatorname{sign} u \rangle.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.11. В случае, когда $d\mu$ является формой риманова объема на M (тем самым, $\rho \equiv 1$), аналоги предложения 5.9 и следствия 5.10 были получены Хессом, Шрадером и Уленброком [35]. Они использовали несколько более сложное определение функции $\text{sign } u$, которое, на самом деле, не является необходимым потому, что оно отличается от нашего определения только на множестве меры 0.

5.12. Сглаживатели Фридрихса. Теперь мы выведем теорему 5.7 из предложения 5.9, используя технику сглаживателей Фридрихса. Для удобства читателя мы сделаем обзор основных определений и результатов работы Фридрихса [29].

Предположим, что $j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j(z) \geq 0$ для любого $z \in \mathbb{R}^n$, $j(z) = 0$ при $|z| \geq 1$ и $\int_{\mathbb{R}^n} j(z) dz = 1$.

Для $\rho > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$ определим $j_\rho(x) = \rho^{-n} j(\rho^{-1}x)$. Тогда $j_\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j_\rho \geq 0$, $j_\rho(x) = 0$, если $|x| \geq \rho$, и $\int_{\mathbb{R}^n} j_\rho(x) dx = 1$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Предположим, что $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$. Определим

$$(J^\rho f)(x) = f^\rho(x) = \int f(x-y) j_\rho(y) dy = \int j_\rho(x-y) f(y) dy, \quad (5.13)$$

где интегрирование производится по $\mathbb{R}^n$. Тогда $J^\rho f(x)$ определена для $x \in \Omega_\rho$, где

$$\Omega_\rho = \{x : x \in \Omega, \text{dist}(x, \partial\Omega) > \rho\}.$$

Напомним следующую стандартную лемму (см. [36; теорема 1.3.2]).

ЛЕММА 5.13. Пусть $1 \leq p < \infty$. В обозначениях (5.13)

- (i) если $f \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$, то $J^\rho f \in C^\infty(\Omega_\rho)$;
- (ii) если $f \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$, то $J^\rho f \rightarrow f$ при $\rho \rightarrow 0$ по норме пространства $L^p(K)$, где $K \subset \Omega$ – любое компактное множество;
- (iii) если $f \in C(\Omega)$, то $J^\rho f \rightarrow f$ при $\rho \rightarrow 0$ равномерно на любом компактном множестве $K \subset \Omega$.

Для того чтобы применить технику сглаживателей Фридрихса к оператору $\nabla^* \nabla$, выберем координатную окрестность U в M с координатами $x^1, x^2, \dots, x^n$. Выбрав локальный репер в расслоении E над U , мы будем отождествлять пространство сечений расслоения E над U с пространством векторнозначных функций на U . При таком отождествлении лапласиан Бохнера $\nabla^* \nabla$ становится эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка, который можно записать в виде

$$\sum_{i,k} a_{ik}(x) \partial_i \partial_k + \sum_i b_i(x) \partial_i + c(x),$$

где a_{ik} , b_i и c – $(m \times m)$ -матрицы, состоящие из гладких функций ($m = \dim E$). Этот оператор можно записать другим образом в виде

$$\sum_{i,k} \partial_i a_{ik}(x) \partial_k + \sum_i b_i(x) \partial_i + c(x), \quad (5.14)$$

с возможно другими a_{ik} , b_i и c . Последняя форма иногда более удобна, если коэффициенты не являются гладкими.

Можно также рассмотреть $u^\rho = \mathcal{J}^\rho u$, где $\mathcal{J}^\rho$ – интегральный оператор, интегральное ядро которого есть $j_\rho(x-y) \text{Id}$, где Id – единичная $(m \times m)$ -матрица.

Теперь мы сформулируем ключевое предложение, доказательство которого дано в приложении А.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.14. *Предположим, что $u \in L^1_{\text{loc}}(E)$ и $\nabla^* \nabla u \in L^1_{\text{loc}}(E)$. Тогда $\nabla^* \nabla u^\rho \rightarrow \nabla^* \nabla u$ в $L^1_{\text{loc}}(E)$ над U при $\rho \rightarrow 0+$.*

5.15. Доказательство теоремы 5.7. Прежде всего заметим, что утверждение на самом деле локально. Именно, используя разбиение единицы, мы видим, что достаточно доказать неравенство в каждой координатной окрестности из некоторого покрытия многообразия M . Зафиксируем такую окрестность U и применим предложение 5.14. Очевидно, что $u^\rho \in C^\infty(E|_{U_\rho})$. Согласно предложению 5.9, для любого $\epsilon > 0$

$$\Delta_M |u^\rho|_\epsilon \leq \text{Re} \left\langle \nabla^* \nabla u^\rho, \frac{u^\rho}{|u^\rho|_\epsilon} \right\rangle. \quad (5.15)$$

В этом неравенстве мы сначала фиксируем $\epsilon > 0$ и затем переходим к пределу при $\rho \rightarrow 0+$.

Рассмотрим левую часть неравенства (5.15). Понятно, что

$$||u^\rho|_\epsilon - |u|_\epsilon| \leq ||u^\rho| - |u|| \leq |u^\rho - u|. \quad (5.16)$$

Поскольку $u^\rho \rightarrow u$ в $L^1_{\text{loc}}(E|_U)$, из (5.16) следует, что $|u^\rho|_\epsilon \rightarrow |u|_\epsilon$ в $L^1_{\text{loc}}(U)$ при $\rho \rightarrow 0+$. Это немедленно дает, что $\Delta_M |u^\rho|_\epsilon \rightarrow \Delta_M |u|_\epsilon$ в смысле теории обобщенных функций над U (или, точнее, над любым относительно компактным открытым множеством). Сейчас мы обратимся к правой части неравенства (5.15). Наша цель состоит в том, чтобы показать, что

$$\text{Re} \left\langle \nabla^* \nabla u^\rho, \frac{u^\rho}{|u^\rho|_\epsilon} \right\rangle - \text{Re} \left\langle \nabla^* \nabla u, \frac{u}{|u|_\epsilon} \right\rangle \rightarrow 0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(U) \quad (5.17)$$

при $\rho \rightarrow 0+$. Прибавляя и вычитая член $\text{Re} \langle \nabla^* \nabla u, |u^\rho|_\epsilon^{-1} u^\rho \rangle$ в левой части неравенства (5.17), получаем

$$\text{Re} \left\langle \nabla^* \nabla u^\rho - \nabla^* \nabla u, \frac{u^\rho}{|u^\rho|_\epsilon} \right\rangle + \text{Re} \left\langle \nabla^* \nabla u, \frac{u^\rho}{|u^\rho|_\epsilon} - \frac{u}{|u|_\epsilon} \right\rangle. \quad (5.18)$$

Пусть $\rho \rightarrow 0+$. Согласно предложению 5.14, $\nabla^* \nabla u^\rho \rightarrow \nabla^* \nabla u$ в $L^1_{\text{loc}}(E|_U)$. Мы также знаем, что $||u^\rho|_\epsilon^{-1} u^\rho| < 1$. Поэтому первое слагаемое в сумме в (5.18) сходится к 0 в $L^1_{\text{loc}}(U)$ (следовательно, в смысле теории обобщенных функций).

Мы знаем, что $\nabla^* \nabla u \in L^1_{\text{loc}}(E)$. Мы уже показали, что при $\rho \rightarrow 0+$ $|u^\rho|_\epsilon \rightarrow |u|_\epsilon$ в $L^1_{\text{loc}}(U)$ и, следовательно, после перехода к подпоследовательности, почти всюду. Поэтому вдоль той же самой подпоследовательности $|u^\rho|_\epsilon^{-1} u^\rho \rightarrow |u|_\epsilon^{-1} u$ почти всюду. Тем самым, из теоремы об ограниченной сходимости следует, что второе слагаемое суммы (5.18) сходится к 0 в $L^1_{\text{loc}}(U)$ (следовательно, в смысле теории обобщенных функций) вдоль некоторой последовательности положительных чисел ρ .

Поэтому для всех $u \in L^1_{\text{loc}}(E)$ таких, что $\nabla^* \nabla u \in L^1_{\text{loc}}(E)$, получаем

$$\Delta_M |u|_\epsilon \leq \text{Re} \left\langle \nabla^* \nabla u, \frac{u}{|u|_\epsilon} \right\rangle. \quad (5.19)$$

В этом неравенстве мы перейдем к пределу в смысле теории обобщенных функций при $\epsilon \rightarrow 0+$. Возьмем вещественнозначную функцию $\phi \in C_c^\infty(M)$ и рассмотрим

$$\int \phi \Delta_M |u|_\epsilon d\mu = \int |u|_\epsilon \Delta_M \phi d\mu \rightarrow \int |u| \Delta_M \phi d\mu. \quad (5.20)$$

Предельное значение в формуле (5.20) можно понимать как значение обобщенной функции $\Delta_M |u|$ на пробной функции ϕ . Поэтому $\Delta_M |u|_\epsilon \rightarrow \Delta_M |u|$ в смысле теории обобщенных функций при $\epsilon \rightarrow 0+$.

В правой части неравенства (5.19) $|u|_\epsilon^{-1} u \rightarrow \text{sign } u$ почти всюду и с равномерной оценкой $||u|_\epsilon^{-1} u| \leq 1$. Поскольку $\nabla^* \nabla u \in L^1_{\text{loc}}(E)$, теорема об ограниченной сходимости показывает, что правая часть сходится к $\text{Re} \langle \nabla^* \nabla u, \text{sign } u \rangle$ в $L^1_{\text{loc}}(M)$ (и, следовательно, в смысле теории обобщенных функций). Теорема доказана.

6. Случай, когда носитель потенциала V мал

В этом разделе мы докажем частный случай теоремы 2.7, когда $D = \nabla$ и носитель потенциала V содержится в координатной окрестности $W \subset M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Предположим, что M – многообразие, наделенное римановой метрикой g^{TM} и гладкой мерой $d\mu$. Пусть $W \subset M$ – относительно компактная координатная окрестность в M , предположим, что $V = V_+ + V_-$ такой, как в предположении А. Предположим дополнительно, что $\text{supp } V \subset W$. Тогда оператор*

$$H_V = \nabla^* \nabla + V$$

существенно самосопряжен на $C_c^\infty(E)$.

Мы предварим доказательство несколькими леммами, которые будут использоваться также и в последующих разделах.

ЛЕММА 6.2. *Если выполнено предположение А и $\text{supp } V_- \subset W$, то существуют такие положительные постоянные $a < 1$, C_a , что*

$$|(V_- u, u)| \leq a \|\nabla u\|^2 + C_a \|u\|^2, \quad u \in C_c^\infty(E). \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{W}$ обозначает замыкание W в M . Согласно (2.2), существуют такие $a_{\overline{W}}, 0 \leq a_{\overline{W}} < 1$, и $C_{\overline{W}} > 0$, что

$$\| |V_-| v \| \leq a_{\overline{W}} \|\Delta_M v\| + C_{\overline{W}} \|v\|, \quad v \in C_c^\infty(M).$$

Другими словами, оператор $|V_-|$ мажорируется оператором Δ_M . Следовательно, по теореме X.18 из [64] квадратичная форма оператора $|V_-|$ будет мажорироваться квадратичной формой оператора Δ_M . Точнее, для любого $a \in (a_{\overline{W}}, 1)$ существует такая постоянная $C_a > 0$, что

$$(|V_-| v, v) \leq a (\Delta_M v, v) + C_a \|v\|^2 = a \|dv\|^2 + C_a \|v\|^2, \quad v \in C_c^\infty(M).$$

Применим это к $v = |u|_\epsilon$, где $u \in C_c^\infty(E)$ и $|u|_\epsilon$ определяется, как в (5.7). Тогда, используя неравенство (5.10), получим:

$$|(V_- u, u)| \leq (|V_-| |u|_\epsilon, |u|_\epsilon) \leq a \|d|u|_\epsilon\|^2 + C_a \| |u|_\epsilon \|^2 \leq a \|\nabla u\|^2 + C_a \| |u|_\epsilon \|^2.$$

Переходя к пределу при $\epsilon \rightarrow 0+$, мы приходим к неравенству (6.1). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.3. Если выполнено предположение A и $\text{supp } V_- \subset W$, то оператор H_V полуограничен снизу на $C_c^\infty(E)$, т.е. существует такая постоянная $C > 0$, что

$$(H_V u, u) \geq -C \|u\|^2 \quad \text{для всех } u \in C_c^\infty(E).$$

Следующая лемма немедленно следует из (2.3).

ЛЕММА 6.4. Предположим, что $H_V = D^*D + V$ такой, как в (2.1). Для любого $\psi \in C^2(M)$ и для любого $u \in L_{\text{loc}}^2(E)$ имеет место следующее равенство обобщенных функций:

$$H_V(\psi u) = \psi H_V u + D^*(\widehat{D}(d\psi)u) - (\widehat{D}(d\psi))^* Du.$$

СЛЕДСТВИЕ 6.5. Предположим, что $u \in \text{Dom}(H_{V,\max})$. Пусть $\psi \in C^2(M)$ – такая функция, что $\text{supp}(d\psi)$ компактен. Если ограничение функции u на открытую окрестность множества $\text{supp}(d\psi)$ принадлежит $W_{\text{loc}}^{1,2}$, то $\psi u \in \text{Dom}(H_{V,\max})$.

6.6. Доказательство предложения 6.1. Зафиксируем такую открытую окрестность $U \subset W$ множества $\text{supp } V$, что замыкание $\overline{U}$ множества U содержится в W . Пусть $\phi, \tilde{\phi}: M \rightarrow [0, 1]$ – такие гладкие функции, что $\phi^2 + \tilde{\phi}^2 \equiv 1$, ограничение функции ϕ на U тождественно равно 1 и $\text{supp } \phi \subset W$. Отсюда следует, что $\text{supp } \tilde{\phi} \subset M \setminus U$. Согласно ИМС-формуле локализации (см. [23; § 3.1], [76; лемма 3.1]), имеем

$$\nabla^* \nabla = \phi \nabla^* \nabla \phi + \tilde{\phi} \nabla^* \nabla \tilde{\phi} + \frac{1}{2} [[\nabla^* \nabla, \phi], \phi] + \frac{1}{2} [[\nabla^* \nabla, \tilde{\phi}], \tilde{\phi}], \quad (6.2)$$

где $[\cdot, \cdot]$ обозначает коммутаторную скобку. Положим

$$J = \frac{1}{2} [[\nabla^* \nabla, \phi], \phi] + \frac{1}{2} [[\nabla^* \nabla, \tilde{\phi}], \tilde{\phi}] = -\frac{1}{2} |d\phi|^2 - \frac{1}{2} |d\tilde{\phi}|^2.$$

Тогда J – гладкая функция на M , носитель которой содержится в $W \setminus U$. При этих обозначениях формула (6.2) принимает вид

$$\nabla^* \nabla = \phi \nabla^* \nabla \phi + \tilde{\phi} \nabla^* \nabla \tilde{\phi} + J. \quad (6.3)$$

Пусть постоянная $C > 0$ такая, как в следствии 6.3. Пусть $b \gg C$ – большое число, которое будет выбрано позже. Предположим, что $u \in L^2(E)$ удовлетворяет равенству

$$(H_V + b)u = 0. \quad (6.4)$$

Здесь выражение $H_V u$ понимается в смысле теории обобщенных функций. Для доказательства предложения достаточно показать, что $u = 0$ (см., например, [64; теорема X.26] или [32]). Рассуждая *от противного*, предположим, что $u \neq 0$.

Поскольку ограничение $V|_{M \setminus U}$ функции V на $M \setminus U$ обращается в нуль, из (6.4) следует, что $\nabla^* \nabla u|_{M \setminus U} = -bu|_{M \setminus U} \in L^2(E)$. Следовательно, из эллиптической регулярности $u|_{M \setminus U} \in W_{\text{loc}}^{2,2}$. Согласно следствию 6.5, сечения ϕu и $\tilde{\phi} u$ принадлежат $\text{Dom}(H_{V,\max})$. Заметим также, что на носителе $\tilde{\phi}$ мы имеем $H_V = \nabla^* \nabla$. Хорошо известно (см., например, [35]) и также следует из приведенного ниже предложения 8.11,

что оператор $\nabla^* \nabla$ существенно самосопряжен (заметим, что предположение А п. 2.1 в этом случае тавтологически выполнено, в то время как предположение В следует из эллиптической регулярности). Следовательно, переходя к замыканию (см. также рассуждения, приведенные в доказательстве предложения 8.13), получаем

$$(\tilde{\phi} \nabla^* \nabla (\tilde{\phi} u), u) = \|\nabla (\tilde{\phi} u)\|^2 \geq 0, \quad (6.5)$$

и равенство достигается только в том случае, когда $\tilde{\phi} u = 0$.

Пусть $\tilde{b} = b - \max_{x \in M} |J(x)|$, предположим, что b достаточно велико, так, что $\tilde{b} > 0$. Из (6.3) и (6.4) получаем

$$0 = ((H_V + b)u, u) \geq (\phi H_V (\phi u), u) + (\tilde{\phi} \nabla^* \nabla (\tilde{\phi} u), u) + \tilde{b} \|u\|^2. \quad (6.6)$$

Поскольку мы предположили, что $u \neq 0$, из уравнений (6.5) и (6.6) следует, что

$$(\phi (H_V + \tilde{b}) (\phi u), u) \leq (\phi H_V (\phi u), u) + \tilde{b} \|u\|^2 \leq 0, \quad \phi u \neq 0. \quad (6.7)$$

Мы можем и будем рассматривать координатную окрестность W как подмножество в $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем риманову метрику $\tilde{g}$ в $\mathbb{R}^n$, ограничение которой на W совпадает с метрикой, индуцированной метрикой g^{TM} , и которая равна стандартной евклидовой метрике в $\mathbb{R}^n$ вне некоторого компактного множества $K \supset W$. Мы также наделим пространство $\mathbb{R}^n$ мерой $\tilde{\mu}$, ограничение которой на W совпадает с мерой, индуцированной мерой μ на M , и ограничение которой на $\mathbb{R}^n \setminus K$ есть мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\tilde{E} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^m$ – тривиальное векторное расслоение в $\mathbb{R}^n$, снабженное стандартной эрмитовой метрикой. Выбирая ортонормированный репер в ограничении $E|_W$ расслоения E на W , мы можем и будем отождествлять $E|_W$ и $\tilde{E}|_W$. Тогда связность ∇ индуцирует эрмитову связность на $\tilde{E}|_W$. Пусть $\tilde{\nabla}$ – эрмитова связность на $\tilde{E}$, которая при ограничении на W совпадает со связностью, индуцированной связностью ∇ , и при ограничении на $M \setminus K$ есть тривиальная плоская связность. Тогда, согласно (6.7), имеем

$$(\phi (\tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla} + V + \tilde{b}) (\phi u), u) \leq 0, \quad \phi u \neq 0.$$

Выберем $\tilde{b}$ достаточно большим, таким, что $\tilde{H}_V = \tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla} + V + \tilde{b} > 0$ на $C_c^\infty(\tilde{E})$ (это возможно в силу следствия 6.3). Отсюда следует (см. теорему X.26 в [64]), что оператор $\tilde{H}_V$ не является существенно самосопряженным на $C_c^\infty(\tilde{E})$. Таким образом, мы свели доказательство предложения к аналогичному вопросу для оператора $\tilde{H}_V$ в $\mathbb{R}^n$.

Поскольку оператор $\tilde{H}_V$ не является существенно самосопряженным, из теоремы X.26 в [64] вытекает, что существует такое ненулевое сечение $v \in L^2(\tilde{E})$, что

$$(\tilde{H}_V + \tilde{b})v = 0. \quad (6.8)$$

Пусть $\tilde{\Delta} := d^* d$ обозначает скалярный лапласиан в $\mathbb{R}^n$, ассоциированный с метрикой $\tilde{g}$ и мерой $\tilde{\mu}$, см. определение 5.4. Из (6.8) и неравенства Като (5.6) получаем

$$\tilde{\Delta}|v| \leq \operatorname{Re} \langle \tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla} v, \operatorname{sign} v \rangle = -\langle (V + \tilde{b})v, \operatorname{sign} v \rangle \leq (|V_-| - \tilde{b})|v|,$$

где $|V_-(x)|$ – норма эндоморфизма $V_-(x): \tilde{E}_x \rightarrow \tilde{E}_x$. Таким образом,

$$(\tilde{\Delta} + \tilde{b})|v| \leq |V_-| |v|. \quad (6.9)$$

Хорошо известно и также объясняется в приложении В, что ядро Шварца оператора $(\tilde{\Delta} + \tilde{b})^{-1}$ положительно. Несколько более тонкие рассуждения (см. предложение В.3 в приложении В) показывают, что из неравенства (6.9) для обобщенных функций следует, что

$$|v| \leq (\tilde{\Delta} + \tilde{b})^{-1} |V_-| |v|, \quad (6.10)$$

где обратный оператор $(\tilde{\Delta} + \tilde{b})^{-1}$ понимается, например, как оператор в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций умеренного роста.

Пусть $\overline{W}$ обозначает замыкание W в M . Поскольку $\text{supp } V_- \subset \overline{W}$, из (2.2) следует, что

$$\| |V_-| s \| \leq a_{\overline{W}} \|\tilde{\Delta} s\| + C_{\overline{W}} \|s\| \quad \text{для всех } s \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Поэтому

$$\| |V_-| (\tilde{\Delta} + \tilde{b})^{-1} s \| \leq a_{\overline{W}} \|\tilde{\Delta} (\tilde{\Delta} + \tilde{b})^{-1} s\| + C_{\overline{W}} \|(\tilde{\Delta} + \tilde{b})^{-1} s\| \leq (a_{\overline{W}} + C_{\overline{W}}/\tilde{b}) \|s\|.$$

Таким образом, мы можем выбрать $\tilde{b}$ достаточно большим, таким, что

$$\| |V_-| (\tilde{\Delta} + \tilde{b})^{-1} \| < 1.$$

Поскольку

$$((\tilde{\Delta} + \tilde{b})^{-1} |V_-|)^* = |V_-| (\tilde{\Delta} + \tilde{b})^{-1},$$

мы заключаем, что $\| (\tilde{\Delta} + \tilde{b})^{-1} |V_-| \| < 1$. Тогда из (6.10) вместе с нашим предположением о том, что $v \neq 0$, следует, что $\|v\| < \|v\|$. Полученное противоречие доказывает предложение.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.7. Одним из основных шагов в приведенном выше доказательстве было сведение к случаю $M = \mathbb{R}^n$, где мы использовали предложение В.3, чтобы заключить, что из неравенства (6.9) вытекает (6.10). Доказательство было бы намного проще, если бы мы знали, что этот факт верен на произвольном полном римановом многообразии, т.е. если бы мы знали, что верна гипотеза Р в приложении В. К сожалению, мы не знаем так ли это на самом деле (см. приложение В, где мы объясняем трудности, которые встречаются при попытке доказать эту гипотезу).

Из предложения 6.1 и следствия 6.3 вытекает (см. теорему Х.26 в [64]) следующее

СЛЕДСТВИЕ 6.8. Пусть V, C такие, как в следствии 6.3. Тогда

$$(H_V u, u) \geq -C \|u\|^2 \quad \text{для всех } u \in \text{Dom}(H_{V, \max}).$$

Пусть $W^{1,2}(E)$ обозначает пополнение пространства $C_c^\infty(E)$ по норме $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$, определяемой скалярным произведением

$$(u, v)_{W^{1,2}} := (u, v) + (\nabla u, \nabla v), \quad u, v \in C_c^\infty(E). \quad (6.11)$$

(Нетрудно увидеть, что $W^{1,2}(E)$ совпадает с множеством всех таких $u \in L^2(E)$, что $\nabla u \in L^2(T^*M \otimes E)$, но мы не будем использовать этот факт.)

Поскольку оператор H_V существенно самосопряжен, область определения $Q(H_V)$ его квадратичной формы совпадает с замыканием пространства $C_c^\infty(E)$ в норме $\|\cdot\|_1$, определяемой по формуле

$$\|u\|_1^2 := (H_V u, u) + (C + 1) \|u\|^2.$$

По теореме Х.23 в [64] имеем $\text{Dom}(H_{V, \max}) \subset Q(H_V)$.

СЛЕДСТВИЕ 6.9. При предположениях предложения 6.1 имеем $Q(H_V) \subset W^{1,2}(E)$. В частности, $\text{Dom}(H_{V,\max}) \subset W^{1,2}(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 6.2, существуют такие $a < 1$ и $C_a > 0$, что $(H_V u, u) = \|\nabla u\|^2 + (V_+ u, u) + (V_- u, u) \geq (1-a)\|\nabla u\|^2 - C_a \|u\|^2$, $u \in C_c^\infty(E)$. Таким образом, область определения $Q(H_V)$ квадратичной формы оператора H_V совпадает с замыканием пространства $C_c^\infty(E)$ по норме

$$\|u\|_1^2 := (H_V u, u) + (C_a + 1)\|u\|^2 \geq (1-a)\|\nabla u\|^2 + \|u\|^2.$$

Следовательно, $Q(H_V)$ содержится в замыкании пространства $C_c^\infty(E)$ по норме $(1-a)\|\nabla u\|^2 + \|u\|^2$, что совпадает с пространством $W^{1,2}(E)$. Следствие доказано.

7. Доказательство второй части теоремы 2.3

В этом разделе мы предположим, что существует такая C^∞ -функция $s: T^*M \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$\sigma(D^*D)(\xi) = s(\xi) \text{Id}$$

для любого $\xi \in T^*M$. Тогда

$$\sigma(D^*D) = |\xi|^2 \text{Id},$$

где $|\xi|$ обозначает норму на T^*M , определяемую скалярным произведением (2.4). В данной ситуации мы скажем, что оператор D^*D имеет скалярный главный символ. Из предложения 2.5 в [6] следует, что существует такая эрмитова связность ∇ на E и такое линейное самосопряженное отображение расслоений $F \in C^\infty(\text{End } E)$, что

$$D^*D = \nabla^*\nabla + F.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть D такой, как выше. Рассмотрим оператор

$$H_V = D^*D + V = \nabla^*\nabla + F + V,$$

где $V = V^+ + V^-$ как в предположении А. Тогда $\text{Dom}(H_{V,\max}) \subset W_{\text{loc}}^{1,2}(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in \text{Dom}(H_{V,\max})$. Нам необходимо доказать, что $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(E)$. Понятно, что достаточно показать, что для любого $x \in M$ существуют такая открытая координатная окрестность $U \ni x$ и такая постоянная C_U , что для всех $j = 1, \dots, n$ и всех $z \in C_c^\infty(E|_U)$ имеем

$$|(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} u, z)| \leq C_U \|z\|.$$

Зафиксируем $x \in M$ и выберем координатную окрестность W_1 точки x . Пусть $\phi: M \rightarrow [0, 1]$ — гладкая функция, носитель которой содержится в W_1 и которая тождественно равна 1 вблизи точки x . Другими словами, мы предположим, что существует такая открытая окрестность W_2 точки x , что $\phi|_{W_2} \equiv 1$. Положим

$$H_\phi := \nabla^*\nabla + \phi(F + V)\phi.$$

Поскольку F гладкая, потенциал $\phi(F+V)\phi$ удовлетворяет Предположению А. Следовательно, согласно предложению 6.1 и следствиям 6.8 и 6.9, оператор H_ϕ существенно самосопряжен, ограничен снизу и $\text{Dom}(H_{\phi,\max}) \subset W^{1,2}(E)$.

Выберем такую открытую окрестность $U \subset W_2$ точки x и такую гладкую функцию $\psi: M \rightarrow [0, 1]$, носитель которой содержится в W_2 , что $\psi|_U \equiv 1$.

ЛЕММА 7.2. *Существует такая постоянная $C_1 = C_1(u, \phi, \psi)$, что*

$$|(\psi u, H_\phi s)| \leq C_1(\|s\| + \|\nabla s\|) \quad \text{для всех } s \in \text{Dom}(H_{\phi, \max}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $s \in \text{Dom}(H_{\phi, \max})$. Поскольку H_ϕ существенно самосопряжен на $C_c^\infty(E)$, существует последовательность $s_k \in C_c^\infty(E)$, которая сходится к s в норме графика оператора H_ϕ . Так как $\text{Dom}(H_{\phi, \max}) \subset W^{1,2}(E)$, мы имеем $s_k \rightarrow s$ также и в топологии пространства $W^{1,2}(E)$. Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |(\psi u, H_\phi s_k)| = |(\psi u, H_\phi s)|, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\|s_k\| + \|\nabla s_k\|) = \|s\| + \|\nabla s\|.$$

Отсюда вытекает, что достаточно доказать лемму в случае, когда $s \in C_c^\infty(E)$, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Поскольку носитель функции ψ компактен, мы заключаем из леммы 6.4, что $\psi H_V - H_V \psi$ определяет непрерывное отображение $W^{1,2}(E) \rightarrow L^2(E)$. Следовательно, существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\|\psi H_V s - H_V(\psi s)\| \leq C(\|s\| + \|\nabla s\|). \quad (7.1)$$

Поскольку $\phi|_{\text{supp } \psi} \equiv 1$, имеем $\psi H_\phi = \psi H_V$. Таким образом, используя (7.1), получаем

$$\begin{aligned} |(\psi u, H_\phi s)| &= |(u, \psi H_V s)| \leq |(u, H_V(\psi s))| + C(\|s\| + \|\nabla s\|)\|u\| \\ &\leq |(H_V u, \psi s)| + C(\|s\| + \|\nabla s\|)\|u\| \\ &\leq \|H_V u\| \|\psi s\| + C(\|s\| + \|\nabla s\|)\|u\| \leq C_1(\|s\| + \|\nabla s\|), \end{aligned}$$

где $C_1 = C\|u\| + \|H_V u\|$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7.3. *Существуют такие положительные постоянные $a < 1$, C_2 , что*

$$(H_\phi s, s) \geq (1 - a)\|\nabla s\|^2 - C_2\|s\|^2, \quad s \in \text{Dom}(H_{\phi, \max}). \quad (7.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы 7.2, достаточно доказать (7.2) для $s \in C_c^\infty(E)$, что мы будем предполагать в дальнейшем. Согласно лемме 6.2, существуют такие постоянные $a' < 1$, C' , что

$$|(\phi V_-(\phi s), s)| \leq a'\|\nabla(\phi s)\|^2 + C'\|s\|^2, \quad s \in C_c^\infty(E). \quad (7.3)$$

Зафиксируем такое $\epsilon > 0$, что $a := a'(1 + \epsilon) < 1$. Положим $m_1 := \max_{x \in M} |d\phi(x)|$. Тогда

$$\|\nabla(\phi s)\|^2 \leq (\|\nabla s\| + m_1\|s\|)^2 \leq (1 + \epsilon)\|\nabla s\|^2 + (1 + 1/\epsilon)m_1^2\|s\|^2. \quad (7.4)$$

Комбинируя формулы (7.3) и (7.4), получим

$$|(\phi V_-(\phi s), s)| \leq a\|\nabla s\|^2 + C''\|s\|^2, \quad (7.5)$$

где $C'' = C' + a'(1 + 1/\epsilon)m_1^2$. Положим $m_2 = \max_{x \in M} |\phi F \phi|$. Из (7.5) и неравенства $V_+ \geq 0$ получим

$$(H_\phi s, s) \geq (\nabla^* \nabla s, s) - |(\phi V_- \phi s, s)| - |(\phi F \phi s, s)| \geq (1 - a) \|\nabla s\|^2 - (C'' + m_2) \|s\|^2.$$

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству предложения 7.1. Зафиксируем $z \in C_c^\infty(E|_U)$ и $j \in \{1, \dots, n\}$. Поскольку оператор H_ϕ существенно самосопряжен и ограничен снизу, при достаточно больших $\lambda \gg 0$ отображение $H_\phi + \lambda: \text{Dom}(H_{\phi, \max}) \rightarrow L^2(E)$ биективно. Положим

$$s = (H_\phi + \lambda)^{-1} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}^* z,$$

где $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}^*$ обозначает оператор, формально сопряженный к $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}$. Тогда, применяя лемму 7.3, получим

$$((H_\phi + \lambda)s, s) \geq (1 - a) \|\nabla s\|^2 + (\lambda - C_2) \|s\|^2. \quad (7.6)$$

Таким образом, если $\lambda > C_2$, то $((H_\phi + \lambda)s, s) > 0$. Поскольку $s \in \text{Dom}(H_{\phi, \max}) \subset W^{1,2}(E)$, мы получим

$$((H_\phi + \lambda)s, s) = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}^* z, s) = (z, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} s).$$

Для любого $\epsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} ((H_\phi + \lambda)s, s) &= (z, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} s) \leq \|z\| \left(\int_U |\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} s|^2 d\mu \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_U |\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} s|^2 d\mu + \frac{1}{2\epsilon} \|z\|^2 \leq \frac{\epsilon C_3}{2} \|\nabla s\|^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|z\|^2, \end{aligned} \quad (7.7)$$

где C_3 – супремум длины вектора $\frac{\partial}{\partial x_j}$ на U . Используя (7.6) и (7.7), получим

$$\|\nabla s\| + \|s\| \leq C_4 \|z\| \quad (7.8)$$

с некоторой постоянной C_4 . Используя лемму 7.2 и (7.8), получим

$$|(u, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}^* z)| = |(\psi u, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}^* z)| = |(\psi u, (H_\phi + \lambda)s)| \leq C_1 (\|\nabla s\| + \|s\|) + C_5 \|s\| \leq C_6 \|z\|,$$

где $C_5 = \|\psi u\|$ и $C_6 = (C_1 + C_5)C_4$. Предложение 7.1 доказано.

8. Квадратичные формы и существенная самосопряженность оператора H_{V_+}

Предположим, что оператор $H_V = D^*D + V$ удовлетворяет предположениям А и В. Всюду в этом разделе мы будем предполагать, что

$$(H_V u, u) \geq \|u\|^2 \quad \text{для всех } u \in C_c^\infty(E). \quad (8.1)$$

8.1. Напомним, что $W_{\text{loc}}^{-1,2}(E)$ есть пространство, двойственное к пространству $W_{\text{comp}}^{1,2}(E)$. Следовательно, пересечение $W_{\text{loc}}^{-1,2}(E) \cap L_{\text{loc}}^1(E)$ состоит из сечений $v \in L_{\text{loc}}^1(E)$, обладающих следующим свойством: для каждого компактного множества $K \subset M$ существует такая постоянная $C_{K,v} > 0$, что

$$\int \langle v, s \rangle d\mu \leq C_{K,v} \|s\|_{W^{1,2}} \quad \text{для всех } s \in C_c^\infty(E), \quad \text{supp } s \subset K,$$

где $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ обозначает норму в пространстве $W^{1,2}(E)$, см. (6.11).

ЛЕММА 8.2. Для всех $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(E)$ имеем $V_- u \in W_{\text{loc}}^{-1,2}(E) \cap L_{\text{loc}}^1(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 6.2, используя поляризацию, получаем, что для любого компактного множества $K \subset M$ существует такая постоянная $C_K > 0$, что

$$\left| \int \langle V_- s_1, s_2 \rangle d\mu \right| \leq C_K \|s_1\|_{W^{1,2}} \|s_2\|_{W^{1,2}}, \quad s_1, s_2 \in C_c^\infty(E), \quad \text{supp } s_2 \subset K. \quad (8.2)$$

Поскольку утверждение леммы локально, мы можем предположить, что носитель сечения u содержится в некоторой координатной окрестности. Зафиксируем такое $u \in W_{\text{comp}}^{1,2}(E)$, и пусть $u^\rho = \mathcal{J}^\rho u$ такое же, как в п. 5.12. Из леммы 5.13 следует, что $u^\rho \rightarrow u$ при $\rho \rightarrow 0$ как в пространстве $W^{1,2}(E)$, так и в пространстве $L^2(E)$. В частности, $\|u^\rho\|_{W^{1,2}}$ ограничено при $0 < \rho < 1$. Следовательно, согласно (8.2), для любого компакта $K \subset M$ существует такая постоянная $C_{K,u} > 0$, что

$$\left| \int \langle V_- u^\rho, s \rangle d\mu \right| \leq C_{K,u} \|s\|_{W^{1,2}}, \quad s \in C_c^\infty(E), \quad \text{supp } s \subset K, \quad 0 < \rho < 1. \quad (8.3)$$

Поскольку $u^\rho \rightarrow u$ в $L_{\text{loc}}^2(E)$, имеем $V_- u^\rho \rightarrow V_- u$ в $L_{\text{loc}}^1(E)$. Следовательно,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0+} \int \langle V_- u^\rho, s \rangle d\mu = \int \langle V_- u, s \rangle d\mu. \quad (8.4)$$

Комбинируя формулы (8.3) и (8.4), получим

$$\left| \int \langle V_- u, s \rangle d\mu \right| \leq C_{K,u} \|s\|_{W^{1,2}}, \quad s \in C_c^\infty(E), \quad \text{supp } s \subset K,$$

что завершает доказательство.

Ниже мы будем часто обозначать через $(\cdot, \cdot)$ двойственность между $W_{\text{comp}}^{-1,2}(E)$ и $W_{\text{loc}}^{1,2}(E)$. Следующая лемма показывает, что это обозначение не приводит к путанице.

ЛЕММА 8.3. Пусть $u \in L^2_{\text{comp}}(E) \subset W^{-1,2}_{\text{comp}}(E)$, $v \in W^{1,2}_{\text{loc}}(E)$. Тогда

$$(u, v) := \int \langle u, v \rangle d\mu = (u, v)',$$

где $(\cdot, \cdot)'$ обозначает двойственность между $W^{-1,2}_{\text{comp}}(E)$ и $W^{1,2}_{\text{loc}}(E)$, продолжающую по непрерывности L^2 -скалярное произведение на $C^\infty_c(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя разбиение единицы, опять можно предположить, что носители сечений u и v содержатся в некоторой координатной окрестности, поэтому мы можем использовать сглаживатели Фридрихса. Пусть $u^\rho = \mathcal{J}^\rho u$, $v^\rho = \mathcal{J}^\rho v$ такие, как в п. 5.12. Из леммы 5.13 следует, что $u^\rho \rightarrow u$ при $\rho \rightarrow 0$ как в $W^{-1,2}(E)$, так и в $L^2(E)$. Аналогично, $v^\rho \rightarrow v$ в $W^{1,2}(E)$ и в $L^2(E)$. Тогда

$$(u, v) = \lim_{\rho \rightarrow 0+} (u^\rho, v^\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0+} (u^\rho, v^\rho)' = (u, v)'.$$

Лемма доказана.

Следующая лемма доказана Брезисом и Браудером [9].

ЛЕММА 8.4. Пусть $A \in L^2_{\text{loc}}(\text{End } E)$ – неотрицательное отображение расслоений (т.е. для любого $x \in M$ эндоморфизм $A_x: E_x \rightarrow E_x$ имеет неотрицательную квадратичную форму), и пусть $u \in W^{1,2}_{\text{comp}}(E)$. Предположим, что $Au \in W^{-1,2}_{\text{comp}}(E)$, тем самым, фактически, $Au \in W^{-1,2}_{\text{comp}}(E) \cap L^1_{\text{comp}}(E)$. Тогда $\langle Au, u \rangle \in L^1_{\text{comp}}(M)$ и

$$\int \langle Au, u \rangle d\mu = (Au, u), \quad (8.5)$$

где $(\cdot, \cdot)$ обозначает двойственность между $W^{-1,2}_{\text{comp}}(E)$ и $W^{1,2}_{\text{loc}}(E)$, продолжающую по непрерывности L^2 -скалярное произведение на $C^\infty_c(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства читателя мы приведем доказательство, которое немного отличается от доказательства, приведенного в [9]. Используя разбиение единицы, мы можем предполагать, что носитель отображения A содержится в координатной окрестности. Поскольку существенны только значения сечения u в некоторой окрестности множества $\text{supp } A$, можно предположить, что носитель сечения u содержится в той же координатной окрестности. Пусть $v \in W^{1,2}(E) \cap L^\infty(E)$. Мы утверждаем, что

$$\int \langle Au, v \rangle d\mu = (Au, v). \quad (8.6)$$

Действительно, обозначим $(Au)^\rho = \mathcal{J}^\rho(Au)$. Из Леммы 5.2 следует, что $(Au)^\rho \rightarrow Au$ при $\rho \rightarrow 0$ как в $W^{-1,2}_{\text{comp}}(E)$, так и в $L^1_{\text{comp}}(E)$. Следовательно,

$$(Au, v) = \lim_{\rho \rightarrow 0+} ((Au)^\rho, v) = \lim_{\rho \rightarrow 0+} \int \langle (Au)^\rho, v \rangle d\mu = \int \langle Au, v \rangle d\mu.$$

Для каждого $R > 0$ определим срезку u_R сечения u по формуле

$$u_R(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } |u(x)| \leq R, \\ R \frac{u(x)}{|u(x)|}, & \text{если } |u(x)| > R. \end{cases}$$

Из теоремы А приложения в работе [52] следует, что $u_R \in W_{\text{comp}}^{1,2}(E)$ для всех $R > 0$ и что $u_R \rightarrow u$ при $R \rightarrow \infty$ в $W_{\text{comp}}^{1,2}(E)$. Следовательно,

$$(Au, u) = \lim_{R \rightarrow \infty} (Au, u_R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int \langle Au, u_R \rangle d\mu, \quad (8.7)$$

где последнее равенство следует из формулы (8.6). Согласно нашему предположению, имеем $\langle A(x)u(x), u(x) \rangle \geq 0$ для почти всех $x \in M$. Следовательно, $\langle A(x)u(x), u_R(x) \rangle$ возрастает по R для почти всех $x \in M$. Теперь лемма следует из теоремы о монотонной сходимости.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.5. Более общие результаты можно найти, например, в [10], [11], [15]. Заметим, что утверждение леммы не вполне тривиально. Например, если w, v – скалярные функции, $w \in W_{\text{loc}}^{-1,2} \cap L_{\text{loc}}^1$ и $v \in W_{\text{comp}}^{1,2}$, то может случиться так, что wv не принадлежит L_{comp}^1 , тем самым, интеграл $\int wv d\mu$ не определен корректно (хотя величина (w, v) абсолютно корректно определена из двойственности между $W^{-1,2}$ и $W^{1,2}$) – см., например, пример, приведенный в [10]. На самом деле, если зафиксировать $w \in L_{\text{loc}}^1$, то условие о том, что wv принадлежит L_{loc}^1 для любого $v \in W_{\text{comp}}^{1,2}$, эквивалентно включению $|w| \in W_{\text{loc}}^{-1,2}$ (это следует, например, из [57; теорема 2, раздел 8.4.4]).

8.6. Применяя лемму 8.4 к отображению расслоений $A = -V_-$ и используя лемму 8.2, мы видим, что интеграл

$$\int \langle V_- u, u \rangle d\mu = (V_- u, u) \quad (8.8)$$

конечен для всех $u \in W_{\text{comp}}^{1,2}(E)$. Рассмотрим выражение $h_V(u)$, определенное по формуле

$$h_V(u) = \|Du\|^2 + \int \langle V_- u, u \rangle d\mu + \int \langle V_+ u, u \rangle d\mu \leq +\infty, \quad u \in W_{\text{comp}}^{1,2}(E).$$

Основным результатом этого раздела является следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.7. *Предположим, что $h_V(u) \geq \|u\|^2$ для всех $u \in C_c^\infty(E)$. Тогда*

$$h_V(u) \geq \|u\|^2 \quad \text{для всех } u \in W_{\text{comp}}^{1,2}(E). \quad (8.9)$$

Доказательство этого предложения занимает оставшуюся часть данного раздела.

Следующая простая лемма об “интегрировании по частям” следует, например, из теоремы 7.7 в [74].

ЛЕММА 8.8. Равенство

$$(Du, v) = (u, D^*v)$$

имеет место, если одно из сечений u, v финитно и $u \in L_{\text{loc}}^2(E)$, $v \in W_{\text{loc}}^{1,2}(F)$ или, наоборот, $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(E)$, $v \in L_{\text{loc}}^2(F)$. Здесь $(\cdot, \cdot)$ понимается либо как скалярное произведение в L^2 , либо как двойственность между $W_{\text{comp}}^{-1,2}$ и $W_{\text{loc}}^{1,2}$, продолжающая по непрерывности L^2 -скалярное произведение на $C_c^\infty(E)$.

Следующая хорошо известная лемма (см. [30]), доказательство которой мы воспроизведем для полноты изложения, дает нам достаточное число “срезающих” функций, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

ЛЕММА 8.9. *Предположим, что g – полная риманова метрика на многообразии M . Тогда существует такая последовательность липшицевых финитных функций $\{\phi_k\}$ на M , что*

- (i) $0 \leq \phi_k \leq 1$ и $|d\phi_k| \leq 1/k$, где $|d\phi_k|$ обозначает длину ковектора $d\phi_k$, индуцированную метрикой g ;
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k(x) = 1$ для любого $x \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть d – функция расстояния в метрике g . Зафиксируем $x_0 \in M$ и положим $P(x) = d(x, x_0)$. Тогда $P(x)$ является липшицевой и, следовательно, почти всюду дифференцируемой функцией. Кроме того, $|dP| \leq 1$. Условие полноты $\int_0^\infty ds = \infty$, где ds – элемент длины дуги, ассоциированный с метрикой g , означает, что $P(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

Рассмотрим такую функцию $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, что $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ вблизи 0 и $|\chi'| \leq 1$. Положим $\phi_k(x) = \chi(P(x)/k)$. Очевидно, что ϕ_k обладает желаемыми свойствами. Лемма доказана.

Следующая лемма является аналогом (5.3) из [79].

ЛЕММА 8.10. *Для любого $u \in \text{Dom}(H_{V, \max}) \subset W_{\text{loc}}^{1,2}(E)$ и для любой липшицевой финитной функции $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$*

$$h_V(\psi u) = \text{Re}(\psi H_V u, \psi u) + \|\widehat{D}(d\psi)u\|^2. \quad (8.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(E)$, имеем $D^*Du \in W_{\text{loc}}^{-1,2}(E)$. Согласно лемме 8.2, также имеем $V_-u \in W_{\text{loc}}^{-1,2}$. Следовательно, $V_+u = H_V u - D^*Du - V_-u \in W_{\text{loc}}^{-1,2}$. Отсюда, согласно лемме 8.4, получаем

$$\int \langle V_+(\psi u), \psi u \rangle d\mu = (V_+(\psi u), \psi u) < \infty.$$

В частности, $h_V(\psi u) < \infty$. Также, используя лемму 8.3, получаем

$$\begin{aligned} (\psi H_V u, \psi u) &= (\psi D^*Du, \psi u) + (V_+(\psi u), \psi u) + (V_-(\psi u), \psi u) \\ &= (\psi D^*Du, \psi u) + \int \langle V_+(\psi u), \psi u \rangle d\mu + \int \langle V_-(\psi u), \psi u \rangle d\mu. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Здесь в левой части равенства $(\cdot, \cdot)$ обозначает L^2 -скалярное произведение, в то время как позднее в этом равенстве оно обозначает двойственность между $W_{\text{comp}}^{-1,2}(E)$ и $W_{\text{loc}}^{1,2}(E)$.

Используя лемму 8.8 об интегрировании по частям, получаем

$$\begin{aligned} (D(\psi u), D(\psi u)) &= (\widehat{D}(d\psi)u, D(\psi u)) + (\psi Du, D(\psi u)) = (\widehat{D}(d\psi)u, D(\psi u)) + (Du, \psi D(\psi u)) \\ &= (\widehat{D}(d\psi)u, \widehat{D}(d\psi)u) + (\widehat{D}(d\psi)u, \psi Du) - (Du, \widehat{D}(d\psi)\psi u) + (Du, D(\psi^2 u)) \\ &= \|\widehat{D}(d\psi)u\|^2 + 2i \text{Im}(\widehat{D}(d\psi)u, \psi Du) + (\psi D^*Du, \psi u). \end{aligned}$$

Складывая эту формулу с ее комплексным сопряжением и деля на 2, получаем

$$(D(\psi u), D(\psi u)) = \|\widehat{D}(d\psi)u\|^2 + \text{Re}(\psi D^*Du, \psi u).$$

Теперь равенство (8.10) следует из (8.11). Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.11. *Предположим, что H_{V_+} (с $V_+ \in L^2_{\text{loc}}(\text{End } E)$, $V_+ \geq 0$) удовлетворяет предположению В. (Это верно, в частности, если $n \leq 3$ или если D^*D имеет скалярный главный символ, и также верно, если $V_+ \in L^p_{\text{loc}}(\text{End } E)$ с $p > n/2$ при $n \geq 4$.) Тогда оператор $H_{V_+} = D^*D + V_+$ существенно самосопряжен на $C_c^\infty(E)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме X.26 из [64], достаточно доказать, что если $u \in L^2(E)$ и $(H_{V_+} + 1)u = 0$, то $u = 0$.

Действительно, для любого такого u мы имеем $u \in \text{Dom}(H_{V_+, \max})$. Возьмем ϕ_k как в лемме 8.9. Из леммы 8.10 с $V = V_+$ получаем

$$h_{V_+}(\phi_k u) = \text{Re}(\phi_k H_{V_+} u, \phi_k u) + \|\widehat{D}(\phi_k u)\|^2 = -\|\phi_k u\|^2 + \|\widehat{D}(\phi_k u)\|^2. \quad (8.12)$$

Поскольку $h_{V_+}(\phi_k u) \geq 0$, из уравнения (8.12) следует, что

$$\|\phi_k u\|^2 \leq h_{V_+}(\phi_k u) + \|\phi_k u\|^2 = \|\widehat{D}(\phi_k u)\|^2 \leq \frac{m}{k^2} \|u\|^2, \quad (8.13)$$

где $m = \dim(E_x)$. Последнее неравенство в (8.13) верно в силу леммы 8.9 и (2.5). Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим $\|u\| = 0$.

Нам необходима следующая хорошо известная абстрактная

ЛЕММА 8.12. *Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство и $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ – линейное подпространство. Пусть $A: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ – существенно самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$. Предположим, что h – такая замкнутая положительная квадратичная форма на $\mathcal{H}$ с областью определения $Q(h) \supset \mathcal{D}$, что*

$$h(u, v) = (Au, v) \quad \text{для всех } u \in \mathcal{D}, \quad v \in Q(h), \quad (8.14)$$

где $h(u, v)$ – полуторалинейная форма, определяемая формой h при помощи поляризации. Тогда замыкание $\overline{A}$ оператора A совпадает с оператором, ассоциированным с h при помощи конструкции Фридрихса, см. [64; §X.23]. В частности, $\mathcal{D}$ является существенной областью определения квадратичной формы h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B – самосопряженный оператор, ассоциированный с h посредством конструкции Фридрихса. Напомним, что область определения $\text{Dom}(B)$ состоит из таких векторов $u \in Q(h)$, что отображение

$$l_u: v \mapsto h(u, v), \quad v \in Q(h),$$

непрерывно, если наделить пространство $Q(h)$ нормой, которую оно наследует из $\mathcal{H}$. В этом случае Bu определяется из формулы

$$h(u, v) = (Bu, v), \quad v \in Q(h). \quad (8.15)$$

Теперь мы готовы доказать лемму. Из (8.14) следует, что отображение l_u непрерывно для всех $u \in \mathcal{D}$. Другими словами, $\mathcal{D} \subset \text{Dom}(B)$. Сравнивая (8.14) и (8.15),

мы заключаем, что $Bu = Au$ для всех $u \in \mathcal{D}$. Таким образом, B является самосопряженным расширением оператора A . Поскольку A существенно самосопряжен, он имеет единственное самосопряженное расширение, и $\bar{A} = B$. Лемма доказана.

Рассмотрим выражение

$$h_{V+}(u) = \|Du\|^2 + \int \langle V_+ u, u \rangle d\mu, \quad (8.15)$$

где h_{V+} рассматривается как квадратичная форма с областью определения

$$Q(h_{V+}) = \{u \in L^2(E) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(E) : h_{V+}(u) < +\infty\}.$$

Понятно, что h_{V+} — замкнутая положительная форма. Напомним (см. предложение 8.11), что оператор H_{V+} существенно самосопряжен на $C_c^\infty(E)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.13. *Замыкание оператора H_{V+} есть оператор, ассоциированный с формой h_{V+} при помощи конструкции Фридрихса. В частности, пространство $C_c^\infty(E)$ является существенной областью определения формы h_{V+} , т.е. $Q(h_{V+})$ совпадает с замыканием пространства $C_c^\infty(E)$ в норме*

$$\|u\|_1^2 := \|Du\|^2 + \int \langle V_+ u, u \rangle d\mu + \|u\|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $Q(h_{V+}) \subset W_{\text{loc}}^{1,2}(E)$, из леммы 8.8 об интегрировании по частям следует, что

$$(H_{V+}u, v) = (D^*Du, v) + \int \langle V_+ u, v \rangle d\mu = (Du, Dv) + \int \langle V_+ u, v \rangle d\mu = h_{V+}(u, v)$$

для всех $u \in C_c^\infty(E)$, $v \in Q(h_{V+})$. Следовательно, применение леммы 8.12 завершает доказательство.

Для любого компактного множества $K \subset M$ определим

$$V_-^{(K)}(x) = \begin{cases} V_-(x), & x \in K, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad V^{(K)} = V_-^{(K)} + V_+.$$

Заметим, что $\left| \int \langle V_-^{(K)} u, u \rangle d\mu \right| = |(V_-^{(K)} u, u)| < \infty$ для всех $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(E)$ согласно (8.8).

ЛЕММА 8.14. *Предположим, что $v_k \rightarrow v$ в $\|\cdot\|_1$. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} (V_-^{(K)} v_k, v_k) = (V_-^{(K)} v, v)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению нормы $\|\cdot\|_1$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|D(v - v_k)\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|v - v_k\| = 0, \quad (8.16)$$

где $\|\cdot\|$ означает L^2 -норму. Зафиксируем такую функцию $\phi \in C_c^\infty(M)$, что $\phi = 1$ в некоторой окрестности компакта K . Тогда из (8.16) получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|D(\phi v - \phi v_k)\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\widehat{D}(d\phi)(v - v_k)\| + \lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi D(v - v_k)\| = 0.$$

Другими словами, ϕv_k сходится к ϕv в $W_{\text{comp}}^{1,2}(E)$. Теперь из леммы 6.2 (или, точнее, из неравенства (8.2)) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (V_-^{(K)} v_k, v_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (V_-^{(K)} \phi v_k, \phi v_k) = (V_-^{(K)} \phi v, \phi v) = (V_-^{(K)} v, v).$$

Лемма доказана.

8.15. Доказательство предложения 8.7. Зафиксируем $u \in W_{\text{comp}}^{1,2}(E)$, и пусть $K \subset M$ – некоторое компактное множество, содержащее окрестность множества $\text{supp } u$. Определим

$$h_{V^{(K)}}(u) = \|Du\|^2 + \int \langle V_+ u, u \rangle d\mu + \int \langle V_-^{(K)} u, u \rangle d\mu = h_{V_+}(u) + (V_-^{(K)} u, u).$$

Если $h_V(u) = +\infty$, то неравенство (8.9) тавтологически верно. Следовательно, мы можем предположить, что $h_V(u) < +\infty$. В частности, $u \in Q(h_{V_+})$. Согласно предложению 8.13, существует такая последовательность $u_k \in C_c^\infty(E)$, что $\|u_k - u\|_1 \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Используя (8.1) и лемму 8.14, получаем

$$\begin{aligned} h_{V_+}(u) + (V_-^{(K)} u, u) &= \lim_{k \rightarrow \infty} h_{V_+}(u_k) + \lim_{k \rightarrow \infty} (V_-^{(K)} u_k, u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_{V^{(K)}}(u_k) \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} h_V(u_k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|^2 = \|u\|^2. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 8.16. Пусть δ, q и V такие, как в теореме 2.7. Тогда

$$\delta(Du, Du) + (Vu, u) \geq -(qu, u) \quad \text{для всех } u \in W_{\text{comp}}^{1,2}(E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что

$$(Du, Du) + \delta^{-1}((V + q)u, u) \geq 0 \quad \text{для всех } u \in W_{\text{comp}}^{1,2}(E).$$

Это немедленно следует из предложения 8.7.

9. Доказательство теоремы 2.7

Всюду в этом разделе мы предполагаем, что потенциал V удовлетворяет условиям теоремы 2.7.

ЛЕММА 9.1. Пусть $0 \leq \psi \leq q^{-1/2} \leq 1$ – липшицева финитная функция, и положим

$$C = \sqrt{m} \operatorname{ess\,sup}_{x \in M} |d\psi(x)| := \operatorname{ess\,sup}_{x \in M} (\operatorname{Re} \operatorname{Tr}((\widehat{D}(d\psi))^* \widehat{D}(d\psi)))^{1/2}.$$

Тогда для любого $u \in \operatorname{Dom}(H_{V, \max})$ имеем

$$\|\psi Du\|^2 \leq \frac{2}{1-\delta} \left(\left(1 + \frac{2C^2(1+\delta)^2}{1-\delta} \right) \|u\|^2 + \|u\| \|H_V u\| \right), \quad (9.1)$$

где $\|\cdot\|$ обозначает L^2 -норму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала отметим, что, согласно замечанию 2.6,

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in M} |\widehat{D}(d\psi)| \leq C.$$

Пусть $u \in \operatorname{Dom}(H_{V, \max})$. Тогда, согласно предположению В, $u \in W_{\operatorname{loc}}^{1,2}(E)$. Следовательно, $\psi^2 Du \in L_{\operatorname{comp}}^2(F)$. Это позволяет применить лемму 8.8 об интегрировании по частям, что дает

$$\begin{aligned} \|\psi Du\|^2 &= (D^*(\psi^2 Du), u) = (\psi^2 D^* Du, u) + 2(\psi \widehat{D}^*(d\psi) Du, u) \\ &= \operatorname{Re}(\psi^2 D^* Du, u) + 2 \operatorname{Re}(\psi \widehat{D}^*(d\psi) Du, u) \\ &\leq \operatorname{Re}(\psi^2 D^* Du, u) + 2C \|\psi Du\| \|u\|. \end{aligned}$$

Более того,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\psi^2 D^* Du, u) &\geq (\psi Du, \psi Du) - 2C \|\psi Du\| \|u\| \\ &= (D(\psi u), D(\psi u)) - (\widehat{D}(d\psi)u, \psi Du) - (\psi Du, \widehat{D}(d\psi)u) - 2C \|\psi Du\| \|u\| \\ &\geq (D(\psi u), D(\psi u)) - 4C \|\psi Du\| \|u\|. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно следствию 8.16,

$$\begin{aligned} (1-\delta) \|\psi Du\|^2 &\leq (1-\delta) \operatorname{Re}(\psi^2 D^* Du, u) + 2C(1-\delta) \|\psi Du\| \|u\| \\ &= \operatorname{Re}(\psi^2 H_V u, u) - \delta \operatorname{Re}(\psi^2 D^* Du, u) - (\psi^2 V u, u) + 2C(1-\delta) \|\psi Du\| \|u\| \\ &\leq \|H_V u\| \|u\| - \delta (D(\psi u), D(\psi u)) - (V(\psi u), \psi u) + 2C(1+\delta) \|\psi Du\| \|u\| \\ &\leq \|H_V u\| \|u\| + (q\psi u, \psi u) + 2C(1+\delta) \|\psi Du\| \|u\| \\ &\leq \|H_V u\| \|u\| + \|u\|^2 + 2C(1+\delta) \|\psi Du\| \|u\|. \end{aligned}$$

Используя неравенство $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) с $\varepsilon = \frac{1-\delta}{2(1+\delta)^2}$, получаем

$$2(1+\delta)C \|\psi Du\| \|u\| \leq \frac{1-\delta}{2} \|\psi Du\|^2 + 2C^2 \frac{(1+\delta)^2}{1-\delta} \|u\|^2.$$

Поэтому

$$(1-\delta) \|\psi Du\|^2 \leq \frac{1-\delta}{2} \|\psi Du\|^2 + \left(1 + \frac{2C^2(1+\delta)^2}{1-\delta} \right) \|u\|^2 + \|u\| \|H_V u\|,$$

откуда немедленно вытекает неравенство (9.1). Лемма доказана.

ЛЕММА 9.2. *Предположим, что метрика g^{TM} полна (как описано в п. 2.5). Пусть q такая, как в теореме 2.7, и пусть $u \in \text{Dom}(H_{V,\max})$. Тогда $q^{-1/2}Du \in L^2(F)$ и*

$$\|q^{-1/2}Du\| \leq \frac{2}{1-\delta} \left(\left(1 + \frac{2L^2(1+\delta)^2}{1-\delta} \right) \|u\|^2 + \|u\| \|H_V u\| \right). \quad (9.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя последовательность ϕ_k липшицевых функций из леммы 8.9, определим $\psi_k = \phi_k \cdot q^{-1/2}$. Тогда $0 \leq \psi_k \leq q^{-1/2}$ и $|d\psi_k| \leq |d\phi_k| \cdot q^{-1/2} + \phi_k |dq^{-1/2}|$. Поэтому $|d\psi_k| \leq 1/k + L$, где L – постоянная Липшица функции $q^{-1/2}$. Поскольку $\psi_k(x) \rightarrow q^{-1/2}(x)$ при $k \rightarrow \infty$, из теоремы Лебега, примененной к неравенству (9.1) с $\psi = \psi_k$, немедленно следует неравенство (9.2). Лемма доказана.

9.3. Доказательство теоремы 2.7. Пусть $u, v \in \text{Dom}(H_{V,\max})$, и пусть $\phi \geq 0$ – липшицева финитная функция. Согласно замечанию 2.8, метрика g^{TM} полна. Из леммы 9.2 мы видим, что $q^{-1/2}Du$ и $q^{-1/2}Dv$ принадлежат $L^2(F)$.

Согласно предположению В, сечения u и v принадлежат $W_{\text{loc}}^{1,2}(E)$. Следовательно, $Du, Dv \in L_{\text{loc}}^2(F)$. Используя лемму 8.8, мы получаем

$$\begin{aligned} (\phi u, D^* Dv) &= (D(\phi u), Dv) = (\widehat{D}(d\phi)u, Dv) + (\phi Du, Dv), \\ (D^* Du, \phi v) &= (Du, D(\phi v)) = (Du, \widehat{D}(d\phi)v) + (\phi Du, Dv). \end{aligned}$$

Согласно (2.5),

$$\text{ess sup}_{x \in M} |\widehat{D}(d\phi)| \leq \sqrt{m} \text{ess sup}_{x \in M} |d\phi(x)|,$$

где $|d\phi|$ обозначает длину ковектора $d\phi$ в метрике g^{TM} . Поэтому

$$\begin{aligned} |(\phi u, H_V v) - (H_V u, \phi v)| &\leq |(\widehat{D}(d\phi)u, Dv)| + |(Du, \widehat{D}(d\phi)v)| \\ &\leq \sqrt{m} \text{ess sup}_{x \in M} (|d\phi| q^{1/2}) \cdot (\|u\| \|q^{-1/2}Dv\| + \|v\| \|q^{-1/2}Du\|). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Рассмотрим метрику $g := q^{-1}g^{TM}$. Обозначим длину ковектора в этой метрике через $|\cdot|_g$. Согласно условию (iii) теоремы, данная метрика полна. Используя метрику g , возьмем последовательность липшицевых функций $\{\phi_k\}$ такую, как в лемме 8.9. Поскольку $|d\phi_k|_g = q^{1/2}|d\phi_k|$, мы получим $q^{1/2}|d\phi_k| \leq 1/k$. Поэтому

$$\text{ess sup}_{x \in M} (|d\phi_k| q^{1/2}(x)) \leq \frac{1}{k}.$$

Используя (9.3), получаем

$$|(\phi_k u, H_V v) - (H_V u, \phi_k v)| \leq \frac{\sqrt{m}}{k} (\|u\| \|q^{-1/2}Dv\| + \|q^{-1/2}Du\| \|v\|) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, по теореме об ограниченной сходимости имеем

$$(\phi_k u, H_V v) - (H_V u, \phi_k v) \rightarrow (u, H_V v) - (H_V u, v) \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, $(H_V u, v) = (u, H_V v)$ для всех $u, v \in \text{Dom}(H_{V,\max})$. Поэтому H_V существенно самосопряжен. Теорема доказана.

10. Доказательство теоремы 2.13

Мы будем действовать, как в § 5.1 работы [79]. Поскольку оператор H_V полуограничен снизу, существует такая постоянная $C > 0$, что $H_V \geq -C$ на $C_c^\infty(E)$.

Прибавляя $(C+1)I$ к оператору H_V , можно предположить, что $H_V \geq I$ на $C_c^\infty(E)$, т.е.

$$(H_V u, u) \geq \|u\|^2, \quad u \in C_c^\infty(E).$$

Хорошо известно (см., например, теорему X.26 из [64]), что оператор H_V существенно самосопряжен тогда и только тогда, когда уравнение $H_V u = 0$ не имеет нетривиальных решений в $L^2(E)$ (понимаемых в смысле теории обобщенных функций). Предположим, что $H_V u = 0$, $u \in L^2(E)$. В частности, $u \in \text{Dom}(H_{V, \max})$. По предположению мы знаем, что $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(E)$.

Пусть ϕ_k – последовательность липшицевых финитных функций из леммы 8.9. Тогда $\phi_k u$ принадлежит пространству $W_{\text{comp}}^{1,2}(E)$ для любого $k = 1, 2, \dots$.

Используя предложение 8.7, лемму 8.10 и равенство $H_V u = 0$, получаем

$$\|\phi_k u\|^2 \leq h_V(\phi_k u) = \|\widehat{D}(d\phi_k)u\|^2 \leq \frac{m}{k^2} \|u\|^2.$$

Последнее неравенство выполняется в силу леммы 8.9 и (2.5). Так как

$$\|u\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k u\|,$$

мы заключаем, что $u = 0$. Теорема доказана.

Приложение А. Сглаживатели Фридрихса

Пусть $u \in (L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n))^m$ – векторнозначная функция в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathcal{J}^\rho$ – интегральный оператор, интегральное ядро которого равно $j_\rho(x-y) \text{Id}$, где Id – единичная $(m \times m)$ -матрица и функция $j_\rho(x-y)$ такая же, как в п. 5.12. Определим $u^\rho = \mathcal{J}^\rho u$.

Основным результатом данного приложения является следующее предложение, которое обобщает результаты Фридрихса [29] и Като [47; раздел 5, лемма 2] на наш векторнозначный случай.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.1. *Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка*

$$L = \sum_{i,k} \partial_i a_{ik}(x) \partial_k + \sum_i b_i(x) \partial_i + c(x), \quad (\text{A.1})$$

где $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$ и $c(x)$ – такие $(m \times m)$ -матрицы, что элементы матриц $a_{ik}(x)$ и $b_i(x)$ суть локально липшицевы функции в $\mathbb{R}^n$ и элементы матрицы $c(x)$ принадлежат $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что $u \in (L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n))^m$ и $Lu \in (L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n))^m$. Предположим, дополнительно, что

$$\partial_k u \in (L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n))^m, \text{ если существуют} \\ \text{такие } x \in \mathbb{R}^n \text{ и } i \in \{1, \dots, n\}, \text{ что } a_{ik}(x) \neq 0. \quad (\text{A.2})$$

Тогда $Lu^\rho \rightarrow Lu$ в $(L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n))^m$.

ЗАМЕЧАНИЕ А.2. Заметим, что предположение (А.2) тавтологически выполняется, если L – оператор первого порядка, т.е. если $a_{ik} \equiv 0$ для всех i, k . С другой стороны, если L – эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с гладкими коэффициентами, то (А.2) является следствием других наших предположений о том, что $u \in (L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n))^m$ и $Lu \in (L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n))^m$. Этот факт вытекает из стандартных результатов об эллиптической регулярности, см., например, рассуждения, приведенные в конце доказательства леммы 4.1. В действительности, в этом случае достаточно предположить, что функции $a_{ik}(x)$ и $b_i(x)$ локально липшицевы и $c(x)$ принадлежит L^∞_{loc} (см. набросок доказательства в [47; раздел 5, лемма 2]³).

В доказательстве мы будем использовать следующую версию результата Фридрикса (см. уравнение (3.8) в доказательстве основной теоремы в работе [29]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.3. Пусть J^ρ такая, как в (5.13). Зафиксируем $i \in \{1, \dots, n\}$ и положим $T = b(x)\partial_i$, где $b(x)$ – локально липшицева функция в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Тогда при $\rho \rightarrow 0+$ имеем

$$(J^\rho T - T J^\rho)v \rightarrow 0 \quad \text{в} \quad L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n). \quad (\text{А.3})$$

То же самое справедливо, если мы заменим $T = b(x)\partial_i$ оператором $\tilde{T} = \partial_i \cdot b$, где b понимается как оператор умножения на функцию $b(x)$.

А.4. Доказательство предложения А.3. Поскольку утверждение предложения А.3 локально, его достаточно доказать в случае, когда носитель функции b компактен и $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$, что мы будем предполагать в дальнейшем. Тогда оператор $K^\rho := J^\rho T - T J^\rho$ является непрерывным оператором $L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\|K^\rho\|$ обозначает его норму.

Мы будем использовать тот факт, что любая локально липшицева функция почти всюду дифференцируема и ее поточечная производная совпадает с обобщенной производной (в частности, производная принадлежит L^∞_{loc}). Этот факт позволяет производить интегрирование по частям с липшицевыми функциями тем же самым образом, как если бы они принадлежали пространству C^1 (см., например, [57; разделы 1.1 и 6.2]).

Для начала мы установим аналог предложения А.3 для операторов нулевого порядка.

ЛЕММА А.5. Если $c \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, то $cu^\rho - (cu)^\rho \rightarrow 0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $\rho \rightarrow 0+$. То же самое справедливо, если u – вектор-функция (со значениями в $\mathbb{C}^m$) и c принимает значения в пространстве $(m \times m)$ -матриц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 5.13 (ii), оба слагаемых в правой части уравнения

$$cu^\rho - (cu)^\rho = c(\mathcal{J}^\rho u - u) + (cu - \mathcal{J}^\rho(cu))$$

сходятся к 0 в $(L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n))^m$ при $\rho \rightarrow 0+$, что и доказывает лемму.

³В [47] предполагается, что функции a_{ik} и b_i принадлежат C^1 , но можно провести те же самые рассуждения, предполагая только, что эти функции липшицевы.

ЛЕММА А.6. Оператор $K^\rho: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$ является интегральным оператором с ядром Шварца

$$k_\rho(x, y) = \frac{\partial}{\partial y^i}((b(x) - b(y))j_\rho(x - y)). \quad (\text{A.4})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} (TJ^\rho v)(x) &= b(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \int j_\rho(x - y)v(y) dy = \int b(x) \frac{\partial}{\partial x^i} (j_\rho(x - y))v(y) dy \\ &= \int b(x) \left(-\frac{\partial}{\partial y^i} j_\rho(x - y) \right) v(y) dy = \int \left(-\frac{\partial}{\partial y^i} (b(x)j_\rho(x - y)) \right) v(y) dy, \\ (J^\rho T v)(x) &= \int j_\rho(x - y)b(y) \frac{\partial}{\partial y^i} v(y) dy = \int \left(-\frac{\partial}{\partial y^i} (b(y)j_\rho(x - y)) \right) v(y) dy. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$K^\rho v(x) = \int k_\rho(x, y)v(y) dy,$$

где функция k_ρ задается формулой (А.4). Поскольку K^ρ есть непрерывный оператор $L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$, лемма доказана.

ЛЕММА А.7. Существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\int |k_\rho(x, y)| dx \leq C \quad \text{для всех } y \in \mathbb{R}^n, \quad \rho > 0. \quad (\text{A.5})$$

В частности, $\|K^\rho\| \leq C$ для всех $\rho > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (А.4) получаем

$$k_\rho(x, y) = -\frac{\partial b(y)}{\partial y^i} j_\rho(x - y) + (b(x) - b(y)) \frac{\partial}{\partial y^i} j_\rho(x - y). \quad (\text{A.6})$$

Сейчас мы оценим интеграл от абсолютных значений всех членов, входящих в правую часть равенства (А.6). Поскольку $\int j_\rho(x - y) dx = 1$, получаем

$$\int \left| \frac{\partial b(y)}{\partial y^i} j_\rho(x - y) \right| dx \leq \text{ess sup}_{y \in \text{supp } b} \left| \frac{\partial b(y)}{\partial y^i} \right| \leq \text{ess sup}_{y \in \text{supp } b} |\nabla b(y)|. \quad (\text{A.7})$$

Напомним, что $j_\rho(x) = \rho^{-n} j(\rho^{-1}x)$, см. п. 5.12. Следовательно,

$$\int \left| (b(x) - b(y)) \frac{\partial}{\partial y^i} j_\rho(x - y) \right| dx \leq \left(\rho \text{ess sup}_{\xi \in \text{supp } b} |\nabla b(\xi)| \right) \cdot \rho^{-1} \int \left| \frac{\partial j(x)}{\partial x^i} \right| dx. \quad (\text{A.8})$$

Из (А.7) и (А.8) мы видим, что оценка (А.5) справедлива с постоянной

$$C = \left(1 + \int |\nabla j(x)| dx \right) \text{ess sup}_{y \in \text{supp } b} |\nabla b(y)|.$$

Лемма доказана.

Напомним, что мы предположили, что носитель функции b компактен. В следующей лемме собраны некоторые дополнительные свойства функции $k_\rho(x, y)$.

ЛЕММА А.8.

- (i) Носитель функции k_ρ содержится в ρ -окрестности $\text{supp } b \times \text{supp } b \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
- (ii) $k_\rho(x, y) = 0$, если $|x - y| > \rho$.
- (iii) Существует такая постоянная $C_1 > 0$, что $\int |k_\rho(x, y)| dx dy \leq C_1$ для всех $\rho > 0$.
- (iv) $\int k_\rho(x, y) dy = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (i) и (ii) немедленно следуют из (А.4); (iii) следует из (i) и (А.5); (iv) выполняется, поскольку k_ρ является производной финитной функции $(b(x) - b(y))j_\rho(x - y)$.

Сейчас мы вернемся к доказательству предложения А.3. Ввиду леммы А.7, достаточно доказать (А.3) при $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Используя леммы А.7 и А.8, получим

$$\begin{aligned} \int |(K^\rho v)(x)| dx &= \int \left| \int k_\rho(x, y) v(y) dy \right| dx \\ &= \int \left| \int k_\rho(x, y) (v(y) - v(x)) dy \right| dx \\ &\leq C_1 \max_{|x-y| \leq \rho} |v(y) - v(x)| \leq C_1 \rho \max_{\xi \in \text{supp } v} |\nabla v(\xi)| \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Это доказывает первую часть предложения А.3. Для доказательства второй части заметим, что

$$\tilde{T}u = \partial_i(bu) = Tu + (\partial_i b)u,$$

таким образом, желаемый результат следует из первой части и леммы А.5.

А.9. Доказательство предложения А.1. Согласно (ii) в лемме 5.13, $(Lu)^\rho - Lu \rightarrow 0$ в $(L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n))^m$ при $\rho \rightarrow 0+$. Таким образом, достаточно показать, что

$$Lu^\rho - (Lu)^\rho = (Lu^\rho - Lu) - ((Lu)^\rho - Lu) \rightarrow 0 \text{ в } (L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n))^m \text{ при } \rho \rightarrow 0+. \quad (\text{А.9})$$

Мы будем оценивать левую часть равенства (А.9) отдельно для членов нулевого, первого и второго порядков оператора L , см. (А.1). Для членов нулевого порядка мы можем использовать лемму А.5. Предложение А.3 дает нам желаемый результат для членов первого порядка (для векторных функций его следует применять отдельно к каждой компоненте вектора). Следующая лемма имеет отношение к членам второго порядка.

ЛЕММА А.10. Зафиксируем такие $i, k \in \{1, \dots, n\}$ и $u \in (L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n))^m$, что $\partial_k u \in (L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n))^m$. Пусть $a(x)$ — $(m \times m)$ -матрица с локально липшицевыми коэффициентами. Тогда $\partial_i(a\partial_k u) - (\partial_i(a\partial_k u))^\rho \rightarrow 0$ в $(L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n))^m$ при $\rho \rightarrow 0+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{J}^\rho$ коммутирует с ∂_k , имеем

$$\begin{aligned} \partial_i(a\partial_k \mathcal{J}^\rho u) - \mathcal{J}^\rho(\partial_i(a\partial_k u)) &= \partial_i(a \mathcal{J}^\rho \partial_k u) - \mathcal{J}^\rho(\partial_i(a\partial_k u)) \\ &= \partial_i(a \mathcal{J}^\rho v) - \mathcal{J}^\rho(\partial_i(av)), \end{aligned} \quad (\text{А.10})$$

где $v = \partial_k u \in (L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n))^m$. Теперь лемма следует из (А.10) и предложения А.3.

Применяя лемму А.5, предложение А.3 и лемму А.10, мы получаем предложение А.1.

А.11. Доказательство предложения 5.14. Поскольку утверждение локально, мы работаем в координатной окрестности U , где оператор $\nabla^*\nabla$ задается формулой (5.14). Используя стандартные рассуждения, основанные на эллиптической регулярности (см., например, рассуждения, приведенные в конце доказательства леммы 4.1), мы видим, что $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(E)$, т.е. $\partial_i u \in L_{\text{loc}}^1$ для всех $i = 1, \dots, n$ в любых локальных координатах. Следовательно, предложение А.1 немедленно дает: $\nabla^*\nabla u^\rho - (\nabla^*\nabla u)^\rho \rightarrow 0$ в $L_{\text{loc}}^1(E|_U)$ при $\rho \rightarrow 0+$.

Приложение В. Положительность

Содержание этого приложения большей частью хорошо известно, но мы не смогли найти подходящую ссылку в литературе.

Мы вкратце опишем классические результаты о положительности для функции Грина оператора $b + \Delta_M$ на полном римановом многообразии (M, g) с гладкой положительной мерой $d\mu$. Здесь $b > 0$ и $\Delta_M = d^*d \geq 0$ – скалярный лапласиан (см. определение 5.4). Заметим, что если $d\mu$ совпадает с римановой формой объема на M , то $\Delta_M = -\Delta_g$, где Δ_g – метрический лапласиан, $\Delta_g u = \text{div}(\text{grad } u)$.

Классический результат, принадлежащий Гафни [30], говорит о том, что оператор Δ_g существенно самосопряжен. Рассуждения Гафни работают без всяких изменений и для оператора Δ_M (при любом выборе меры $d\mu$). Мы воспроизводим их в доказательстве леммы 8.9. Более общее утверждение о существенной самосопряженности оператора $\nabla^*\nabla$ следует также из предложения 8.11. (Заметим, что предположение А тавтологически выполняется в этом случае, в то время как предположение В следует из эллиптической регулярности.)

Отсюда следует, что оператор $b + \Delta_M$ также существенно самосопряжен и строго положителен. Точнее,

$$((b + \Delta_M)u, u) \geq b(u, u), \quad u \in C_c^\infty(M), \quad (\text{В.1})$$

следовательно, это верно для всех $u \in \text{Dom}(\Delta_{M, \max})$. В частности, спектр оператора $b + \Delta_M$ есть подмножество полуоси $[b, +\infty)$, следовательно, оператор $(b + \Delta_M)^{-1}$ всюду определен и ограничен. Обозначим через $G_b = G_b(\cdot, \cdot)$ его ядро Шварца, которое локально интегрируемо на $M \times M$, гладкое (C^∞) вне диагонали в $M \times M$ и имеет особенности на диагонали, которые легко описываются многими методами (например, с помощью техники псевдодифференциальных операторов).

ТЕОРЕМА В.1. *Во введенных выше обозначениях*

$$G_b(x, y) \geq 0 \quad \text{для всех } x, y \in M, \quad x \neq y. \quad (\text{В.2})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это доказательство было сообщено нам А. Григорьяном. Достаточно установить, что

$$u(x) := \int_M G_b(x, y) \phi(y) d\mu(y) \geq 0, \quad x \in M, \quad (\text{В.3})$$

для любого $\phi \in C_c^\infty(M)$, $\phi \geq 0$. Очевидно, что $u = (b + \Delta_M)^{-1}\phi \in L^2(M)$ и оно удовлетворяет уравнению

$$(b + \Delta_M)u = \phi. \quad (\text{В.4})$$

В частности, $u \in C^\infty(M)$.

Заметим, что уравнение (В.4) имеет единственное решение $u \in L^2(M)$ (понимаемое в смысле теории обобщенных функций). Сейчас мы дадим конструкцию положительного решения $v \in L^2(M)$ этого уравнения, что завершит доказательство, поскольку тогда в силу единственности мы будем иметь $v = u$.

Возьмем последовательность относительно компактных открытых подмножеств с гладкой границей в M

$$\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \dots \subseteq \Omega_k \subseteq \Omega_{k+1} \subseteq \dots$$

(т.е. Ω_k относительно компактно в Ω_{k+1}), тем самым, они исчерпывают M , т.е. их объединение есть M . Для любого k обозначим через v_k решение следующей задачи Дирихле в Ω_k :

$$(b + \Delta_M)v_k = \phi, \quad v_k|_{\partial\Omega_k} = 0. \quad (\text{В.5})$$

Будем рассматривать только достаточно большие k такие, что $\text{supp } \phi \subset \Omega_k$. Из принципа максимума следует, что $v_k \geq 0$ и, более того, что

$$0 \leq v_k \leq v_{k+1} \quad \text{для всех } k.$$

Таким образом, последовательность функций $v_1, v_2, \dots$ возрастает, поэтому существует поточечный предел

$$v(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x), \quad x \in M.$$

Докажем, что, на самом деле, он почти всюду конечен и локально ограничен.

Для этого умножим уравнение в (В.5) на $v_k d\mu$ и проинтегрируем по Ω_k . Используя формулу Стокса, получим

$$\int_{\Omega_k} (bv_k^2 + |dv_k|^2) d\mu = \int_{\Omega_k} \phi v_k d\mu \leq \frac{b}{2} \int_{\Omega_k} v_k^2 d\mu + \frac{1}{2b} \int_{\Omega_k} \phi^2 d\mu,$$

следовательно,

$$\int_{\Omega_k} \left(\frac{b}{2} v_k^2 + |dv_k|^2 \right) d\mu \leq \frac{1}{2b} \int_{\Omega_k} \phi^2 d\mu,$$

что, в частности, дает равномерную оценку L^2 -нормы функций v_k на любом компактном множестве в M . В силу стандартных внутренних эллиптических оценок (см., например, [87; раздел 5.3]) отсюда вытекает, что каждая производная функции v_k равномерно ограничена по k на каждом компактном множестве $L \subset M$, следовательно, последовательность v_k сходится в топологии пространства $C^\infty(M)$. Поэтому v всюду конечна, положительна и удовлетворяет (В.4). Применяя теорему Фату, мы видим также, что $v \in L^2(M)$. Поэтому $v = u$, следовательно, $u \geq 0$. Теорема доказана.

В более общем контексте доказательство положительности решения u уравнения (В.4) может представлять собой проблему. Именно, предположим, что

$$(b + \Delta_M)u = \nu \geq 0, \quad u \in L^2(M),$$

где неравенство $\nu \geq 0$ означает, что ν – положительная обобщенная функция, т.е. $(\nu, \phi) \geq 0$ для любого $\phi \in C_c^\infty(M)$, $\phi \geq 0$. Отсюда следует, что ν , в действительности, есть положительная мера Радона (см., например, [31; теорема 1, раздел 2, гл. II]).

Гипотеза Р. В данной ситуации $u \geq 0$ (почти всюду или, эквивалентно, как обобщенная функция).

На первый взгляд кажется, что приведенное выше доказательство (с $\phi \in C_c^\infty(M)$ вместо ν) могло бы сработать и в этом случае. Но, на самом деле, оно не работает без дополнительных ограничений на u или M (см. ниже предложение В.2). Объясним, в чем состоит трудность.

Взяв пробную функцию $\phi \in C_c^\infty(M)$, $\phi \geq 0$, нам необходимо доказать, что $(u, \phi) \geq 0$. Решим уравнение $(b + \Delta_M)\psi = \phi$, $\psi \in L^2(M)$. Тогда мы видим, что $\psi \in C^\infty(M)$ и $\psi \geq 0$ согласно теореме В.1. Таким образом, можно написать

$$(u, \phi) = (u, (b + \Delta_M)\psi).$$

Теперь можно переписать правую часть этого равенства в виде

$$(u, (b + \Delta_M)\psi) = ((b + \Delta_M)u, \psi)_S = (\nu, \psi)_S,$$

где эрмитова форма $(\cdot, \cdot)_S$ в правой части получается продолжением по непрерывности (с $C_c^\infty(M) \times C_c^\infty(M)$) скалярного произведения в $L^2(M)$ до (невыврожденной) эрмитовой двойственности пространств Соболева

$$\tilde{H}^{-2}(M) \times \tilde{H}^2(M) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\text{В.6})$$

где $\tilde{H}^{-2}(M) = (b + \Delta_M)L^2(M)$, $\tilde{H}^2(M) = \text{Dom}(\Delta_{M, \max}) = \text{Dom}(\Delta_{M, \min})$ с гильбертовыми структурами, перенесенными из $L^2(M)$ при помощи оператора $b + \Delta_M$, действующего из $L^2(M)$ в $\tilde{H}^{-2}(M)$ и из $\tilde{H}^2(M)$ в $L^2(M)$. Нормы в $\tilde{H}^2(M)$ и $\tilde{H}^{-2}(M)$ задаются формулами

$$\|v\|_2 = \|(b + \Delta_M)v\|, \quad \|(b + \Delta_M)f\|_{-2} = \|f\|, \quad (\text{В.7})$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $L^2(M)$.

Продолжение двойственности (В.6) с $C_c^\infty(M) \times C_c^\infty(M)$ корректно определено потому, что пространство $C_c^\infty(M)$ плотно как в пространстве $\tilde{H}^{-2}(M)$, так и в $\tilde{H}^2(M)$ по соответствующим нормам (В.7). Действительно, плотность пространства $C_c^\infty(M)$ в $\tilde{H}^2(M)$ просто означает, что $(b + \Delta_M)C_c^\infty(M)$ плотно в $L^2(M)$. Чтобы установить это, возьмем функцию $f \in L^2(M)$, ортогональную к $(b + \Delta_M)C_c^\infty(M)$ в $L^2(M)$. Это означает, что $(b + \Delta_M)f = 0$ в смысле теории обобщенных функций, т.е. f принадлежит нуль-пространству максимального оператора $(b + \Delta_M)_{\max}$. Отсюда следует, что $f = 0$ в силу упоминавшейся выше существенной самосопряженности и строгой положительности оператора $b + \Delta_M$.

Аналогично, плотность пространства $C_c^\infty(M)$ в $\tilde{H}^{-2}(M)$ означает, что пространство $(b + \Delta_M)^{-1}C_c^\infty(M)$ плотно в $L^2(M)$. Для того чтобы это доказать, рассмотрим такую функцию $h \in L^2(M)$, что h ортогональна пространству $(b + \Delta_M)^{-1}C_c^\infty(M)$. Поскольку $(b + \Delta_M)^{-1}$ – ограниченный самосопряженный оператор, отсюда следовало бы, что $(b + \Delta_M)^{-1}h = 0$, следовательно, $h = 0$.

Заметим, что пространство $\tilde{H}^2(M)$ отличается (по крайней мере, формально) от пространства $H_2^2(M)$, норма в котором включает произвольные ковариантные производные второго порядка (см. [33; раздел 2.2]). Кажется, до сих пор неизвестно, плотно ли пространство $C_c^\infty(M)$ в $H_2^2(M)$ (см. [33; раздел 3.1]).

Сейчас нам необходимо знать, верно или нет то, что

$$(\nu, \psi)_S = \int_M \psi \nu \quad (\text{B.8})$$

(интеграл в правой части имеет смысл как интеграл от положительной меры, хотя он может быть бесконечным). Если это верно, то все доказано, поскольку интеграл, очевидно, неотрицателен.

Возможный способ установить (B.8) состоит в том, чтобы представить функцию ψ в виде предела

$$\psi = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k,$$

где $\psi_k \in C_c^\infty(M)$, $\psi_k \geq 0$, $\psi_k \leq \psi_{k+1}$ и предел берется в норме $\|\cdot\|_2$. Равенство (B.8), очевидно, выполняется, если заменить ψ функцией ψ_k , поэтому в пределе мы получим равенство для ψ .

Можно попытаться взять $\psi_k = \chi_k \psi$, где $\chi_k \in C_c^\infty(M)$, $0 \leq \chi_k \leq 1$, $\chi_k \leq \chi_{k+1}$ и для любого компакта $L \subset M$ существует такое k , что $\chi_k|_L = 1$. Тогда, очевидно, $\psi_k \rightarrow \psi$ при $k \rightarrow +\infty$ в $L^2(M)$. Мы также хотим иметь $\Delta_M \psi_k \rightarrow \Delta_M \psi$ в $L^2(M)$. Понятно, что

$$\Delta_M \psi_k = \chi_k \Delta_M \psi - 2\langle d\chi_k, d\psi \rangle + (\Delta_M \chi_k) \psi.$$

Очевидно, $\chi_k \Delta_M \psi \rightarrow \Delta_M \psi$ в $L^2(M)$. Сейчас заметим также, что

$$\|d\psi\|^2 = (\Delta_M \psi, \psi) \leq \frac{1}{2} \|\Delta_M \psi\|^2 + \frac{1}{2} \|\psi\|^2$$

и, с другой стороны, $d\chi_k \rightarrow 0$ и $\Delta_M \chi_k \rightarrow 0$ в $C^\infty(M)$. Наша цель будет достигнута, если мы сможем построить χ_k таким образом, что

$$\sup_{x \in M} |d\chi_k(x)| \leq C, \quad \sup_{x \in M} |\Delta_M \chi_k(x)| \leq C, \quad (\text{B.9})$$

где $C > 0$ не зависит от k . Это приводит к следующему утверждению, сообщенному нам Дэйвисом (E. B. Davies).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ В.2. *Предположим, что (M, g) – такое полное риманово многообразие с положительной гладкой мерой, что существуют срезающие функции χ_k , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие приведенным выше предположениям. Тогда справедлива гипотеза P.*

Всегда возможно (на любом полном римановом многообразии) построить срезающие функции χ_k , удовлетворяющие всем условиям, за исключением равномерной оценки для $\Delta_M \chi_k$ (т.е. второй оценки в (B.9)). Это было сделано Кархером [45] (см. также [79]). Но оценка для $\Delta_M \chi_k$ представляет собой трудность. Следующее достаточное условие дает важный класс примеров.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ В.3. Пусть (M, g) – многообразие ограниченной геометрии с произвольной мерой $d\mu$, имеющей гладкую положительную плотность. Тогда гипотеза Р справедлива.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определение и свойства многообразий ограниченной геометрии см., например, в [67], [75]. В частности, конструкция срезающих функций χ_k , обладающих всеми необходимыми свойствами, на любом многообразии ограниченной геометрии может быть найдена в [75; с. 61].

ЗАМЕЧАНИЕ В.4. Заметим, что условия ограниченной геометрии не накладываются на меру $d\mu$, которая может быть произвольной мерой с положительной гладкой плотностью.

В.5. Пример. Рассмотрим $M = \mathbb{R}^n$ с метрикой g , которая совпадает со стандартной плоской метрикой g_0 вне компактного множества. Тогда гипотеза Р справедлива. Ее также можно доказать, используя обратимость оператора $b + \Delta_M$ в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, что, в свою очередь, дает его обратимость в двойственном пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, состоящем из обобщенных функций умеренного роста.

Приложение С. Классы Штуммеля и Като

В этом приложении мы сделаем краткий обзор определений и наиболее важных свойств классов Штуммеля и Като функций в $\mathbb{R}^n$ и на многообразиях.

С.1. Классы Штуммеля. Равномерные классы Штуммеля в $\mathbb{R}^n$ были введены Штуммелем [84]. Более детальное описание классов Штуммеля и доказательства можно найти в разделе 1.2 в книге [23], гл. 5 и 9 книги [72], а также в [2], [83], [84].

(Равномерный) класс Штуммеля S_n состоит из таких измеримых вещественнозначных функций V в $\mathbb{R}^n$, что

$$\begin{aligned} \lim_{r \downarrow 0} \left[\sup_x \int_{|x-y| \leq r} |x-y|^{4-n} |V(y)|^2 dy \right] &= 0, \quad \text{если } n \geq 5, \\ \lim_{r \downarrow 0} \left[\sup_x \int_{|x-y| \leq r} \ln(|x-y|^{-1}) |V(y)|^2 dy \right] &= 0, \quad \text{если } n = 4, \\ \sup_x \int_{|x-y| \leq r_0} |V(y)|^2 dy &< \infty, \quad \text{если } n \leq 3. \end{aligned}$$

Здесь $r_0 > 0$ – произвольная фиксированная постоянная. Понятно, что класс S_n инвариантен при умножении на любую вещественнозначную ограниченную измеримую функцию. Также легко видеть, что если $f \in S_n$ и диффеоморфизм $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ линейен около бесконечности, то $\phi^* f = f \circ \phi \in S_n$. Поэтому для любого многообразия с $\dim M = n$ корректно определена соответствующая локальная версия $S_{n,\text{loc}}(M)$. Будем обозначать через $S_{n,\text{comp}}(M)$ класс функций $f \in S_{n,\text{loc}}(M)$, имеющих компактный носитель. Оба класса $S_{n,\text{loc}}(M)$ и $S_{n,\text{comp}}(M)$ инвариантны при действии диффеоморфизмов многообразия M и также при умножении на вещественнозначные, локально ограниченные измеримые функции.

Имеет место следующая связь локальных классов Штуммеля с пространствами L^p :

$$L_{\text{loc}}^p(M) \subset S_{n,\text{loc}}(M), \quad \text{если } p > n/2 \text{ при } n \geq 4, \quad p = 2 \text{ при } n \leq 3. \quad (\text{С.1})$$

То же самое верно для классов функций с компактным носителем и для равномерных классов S_n в $\mathbb{R}^n$ (если заменить $L^p(\mathbb{R}^n)$ классом $L^p_{\text{unif}}(\mathbb{R}^n)$, который состоит из функций $u \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, L^p -нормы которых на всех единичных шарах ограничены).

Важное свойство равномерных классов Штуммеля состоит в том, что если $u \in S_k$ в $\mathbb{R}^k$ и $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ – сюръективная линейная проекция, то $\pi^*u \in S_n$. Отсюда, очевидно, следует соответствующее свойство для локальных классов Штуммеля по отношению к субмерсиям многообразий.

Следующее свойство мажорирования делает классы Штуммеля важными в теории операторов Шрёдингера: если $V \in S_n$ в $\mathbb{R}^n$, то для любого $a > 0$ существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\|Vu\| \leq a\|\Delta u\| + C\|u\|, \quad u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (\text{C.2})$$

где Δ – плоский лапласиан. Отсюда следует, что если $V \in S_{n,\text{loc}}(M)$, где $\dim M = n$, то (2.2) имеет место для функции V (вместо $|V_-|$) в силу того факта, что локально все эллиптические операторы одного порядка имеют одинаковую силу.

С.2. Пример. $1/|x| \in L^2_{\text{unif}}(\mathbb{R}^3)$, следовательно, $1/|x| \in S_3$. Отсюда следует, что $1/|x_k - x_l| \in S_{3N}$ в $\mathbb{R}^{3N}$, если $1 \leq k < l \leq N$, $x_k, x_l \in \mathbb{R}^3$ и точки в $\mathbb{R}^{3N}$ представляются в виде $x = (x_1, \dots, x_N)$ с $x_j \in \mathbb{R}^3$. Поэтому из (C.2) вытекает, что отношение мажорирования

$$\| |x_k - x_l|^{-1} u \| \leq a\|\Delta u\| + C\|u\|, \quad u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{3N}), \quad (\text{C.3})$$

справедливо с произвольным $a > 0$ и $C = C(a)$. Заметим, однако, что $|x_k - x_l|^{-1} \notin L^{3N/2}(\mathbb{R}^{3N})$ уже при $N = 2$.

С.3. Классы Като. Равномерные классы Като K_n определяются аналогично классам Штуммеля S_n . Эти классы играют ту же самую роль для мажорирования квадратичных форм, что классы Штуммеля играют для мажорирования операторов. Они были введены Билсом [3] как частный случай более общих классов из работы Шехтера [71] (см. также книгу Шехтера [72] или ее первое издание, опубликованное в 1971 году). Годом позже этот класс был переоткрыт Като в его знаменитой статье [47], в которой появилось неравенство Като.

Хорошее введение в теорию классов Като K_n можно найти в разделе 1.2 книги [23]. Они интенсивно изучались Айзенманом и Саймоном ([2], [82]).

(Равномерный) класс Като K_n состоит из таких измеримых вещественнозначных функций V в $\mathbb{R}^n$, что

$$\begin{aligned} \lim_{r \downarrow 0} \left[\sup_x \int_{|x-y| \leq r} |x-y|^{2-n} |V(y)| dy \right] &= 0, & \text{если } n \geq 3, \\ \lim_{r \downarrow 0} \left[\sup_x \int_{|x-y| \leq r} \ln(|x-y|^{-1}) |V(y)| dy \right] &= 0, & \text{если } n = 2, \\ \sup_x \int_{|x-y| \leq r_0} |V(y)| dy &< \infty, & \text{если } n = 1. \end{aligned}$$

Здесь $r_0 > 0$ – произвольное фиксированное число. Опять K_n инвариантен при умножении на любую вещественнозначную ограниченную измеримую функцию, а также при диффеоморфизмах пространства $\mathbb{R}^n$, которые линейны вблизи бесконечности.

Тем самым, соответствующий локальный класс $K_{n,\text{loc}}(M)$ корректно определен для любого многообразия с $\dim M = n$, и мы будем обозначать через $K_{n,\text{comp}}(M)$ класс функций $f \in K_{n,\text{loc}}(M)$, которые имеют компактный носитель. Оба класса $K_{n,\text{loc}}(M)$ и $K_{n,\text{comp}}(M)$ инвариантны под действием диффеоморфизмов многообразия M и также при умножении на любую вещественнозначную локально ограниченную измеримую функцию.

Отношение, подобное (С.1), также имеет место для классов Като:

$$L_{\text{loc}}^p(M) \subset K_{n,\text{loc}}(M), \quad \text{если } p > n/2 \text{ при } n \geq 2, \quad p = 2 \text{ при } n = 1.$$

То же самое верно для классов функций с компактным носителем и для равномерных классов K_n в $\mathbb{R}^n$ (если $L^p(\mathbb{R}^n)$ заменить классом $L_{\text{unif}}^p(\mathbb{R}^n)$).

Что касается равномерных классов Штуммеля, также верно, что если $u \in K_s$ в $\mathbb{R}^s$ и $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ – сюръективная линейная проекция, то $\pi^*u \in K_n$. Отсюда, очевидно, следует соответствующее свойство для локальных классов Като по отношению к субмерсиям многообразий.

Следующее свойство мажорирования для квадратичных форм делает важными классы Като: если $V \in K_n$ в $\mathbb{R}^n$, то для любого $a > 0$ существует такое $C > 0$, что

$$|(Vu, u)| \leq a(\Delta u, u) + C\|u\|^2, \quad u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Рассуждения, приведенные в примере С.2, можно повторить дословно, заменив классы Штуммеля на классы Като.

Приложение D. Еще об истории

В этом приложении мы опишем некоторые близкие результаты и дадим библиографические комментарии. Этот раздел дополняет п. 2.16, в котором были приведены самые недавние ссылки.

Данный обзор никоим образом не является полным. Его практически невозможно сделать полным. (Например, MathSciNet, база данных Американского математического общества, основывающаяся на журнале “Mathematical Review”, приводит более тысячи близких работ.) Поэтому, за исключением нескольких поворотных работ и работ, которые несомненно были важны для нашей работы или близко связаны с нею, мы сконцентрировали свое внимание на результатах об операторах на многообразиях. Всесторонний обзор результатов о самосопряженности для одномерных операторов можно найти в книге [25]. О многомерном случае (для операторов в $\mathbb{R}^n$) можно прочесть в книгах [64; гл. X], [26], а также в обзорных работах [43], [41] и [83]. Мы старались не повторять эти источники, если это не имело непосредственного отношения к основному тексту нашей работы.

Как и много хорошего в математике, эта история была начата Г. Вейлем (1909–1910 гг.) в его пионерских работах по спектральной теории одномерных симметрических сингулярных дифференциальных операторов (см. [90]–[92] и также [20; гл. IX], [34; гл. 13] или [55; гл. II, раздел 2]). Здесь “сингулярный” означает, что один или оба конца интервала, на котором рассматривается оператор, либо бесконечны, либо являются особенностями коэффициентов оператора. В зависимости от асимптотического поведения решений соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения в сингулярном конце интервала, на котором рассматривается оператор, Г. Вейль

классифицировал то, что происходит на этом конце, или как случай *предельной точки*, или как случай *предельной окружности*. В современной терминологии (которая возникла десятилетиями позже, после изобретения квантовой механики и ее математической формулировки фон Нейманом) случай предельной точки на обоих концах соответствует существенной самосопряженности.

Среди первых авторов, писавших о многомерных операторах Шрёдингера $H_V = -\Delta + V$ в $\mathbb{R}^n$, мы находим Карлемана [14] и Фридрихса [28], которые независимо доказали существенную самосопряженность в случае, когда потенциал V локально ограничен и полуограничен снизу. (Доказательство Карлемана воспроизведено в книге Глазмана [32; гл. 1, теорема 34].)

Переходя ближе к настоящему времени, рассмотрим магнитный оператор Шрёдингера (в $M = \mathbb{R}^n$), который имеет вид

$$H_{g,b,V} = - \sum_{j,k=1}^n (\partial_j - ib_j(x)) g^{jk}(x) (\partial_k - ib_k(x)) + V(x), \quad (\text{D.1})$$

где матрица $g^{jk}(x)$ (метрика) предполагается вещественной, симметрической, положительно определенной, b_j и V — некоторые вещественнозначные функции. Можно накладывать дополнительные условия регулярности на g^{jk} , b_j и V . Мы будем предполагать, что коэффициенты g^{jk} достаточно гладкие (по крайней мере, локально липшицевы).

Мы будем использовать обозначение $H_{b,V}$ для оператора $H_{g,b,V}$ с плоской метрикой g^{jk} , т.е. $g^{jk} = \delta_{jk}$.

Сначала предположим для простоты, что $b_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Мы хотели бы, чтобы оператор $H_{b,V}$ был естественно определен на $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда нам необходимо предположить, что $V \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$.

Самое впечатляющее улучшение результата Карлемана и Фридрихса в случае полуограниченных снизу потенциалов V принадлежит Като [47]. Като установил, что можно полностью устранить требование локальной ограниченности потенциала V , поскольку достаточно потребовать, что $V \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$ и V полуограничен снизу (даже для магнитного оператора Шрёдингера $H_{b,V}$ с $b_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$). То, что сейчас называется неравенством Като, впервые появилось в этом контексте в работе [47]. Именно, обозначим через L оператор в (D.1) с $V = 0$ и через L_0 оператор с $b_j = 0$ и $V = 0$ (таким образом, $L_0 = -\Delta$). Предположим также, что $u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ и $Lu \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$L_0|u| \leq \text{Re}(Lu \cdot \text{sign } \bar{u}),$$

где $(\text{sign } u)(x) = u(x)/|u(x)|$, если $u(x) \neq 0$, и 0 в противном случае. Основным результатом работы Като [47] являлась существенная самосопряженность оператора $H_{b,V}$ с $V = V_1 + V_2$, где $V_1 \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$, $V_1 \geq -f(|x|)$, $f(r)$ — монотонно неубывающая функция от $r = |x|$, которая равна $o(r^2)$ при $r \rightarrow \infty$, и V_2 принадлежит тому, что сейчас называется классом Като (см. приложение C). В частности, Като был первым, кто установил существенную самосопряженность оператора H_V с $V \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$, $V \geq 0$, без каких-либо глобальных условий на V .

Возвращаясь к более общему случаю оператора $H_{b,V}$, мы опустим теперь требование $b_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда естественными требованиями для того, чтобы минимальный

оператор был корректно определен, являются $b \in (L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n))^n$, $\text{div } b \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и $V \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Работая только при этих минимальных условиях регулярности, Ляйнфельдер и Зимадер [52] смогли улучшить результат Като, допуская потенциалы вида $V = V_1 + V_2$, где $V_1 \geq -c|x|^2$ и V_2 Δ -ограничен с относительной границей $a < 1$. В частности, если V полуограничен снизу, то приведенные выше минимальные условия регулярности на b и V достаточны для существенной самосопряженности (см. также [23; гл. 1]). В [52] использовалась нетривиальная техника нелинейной срезки для того, чтобы аппроксимировать функции из максимальной области определения оператора $H_{b,V}$ и его квадратичной формы ограниченными функциями.

Имеется следующий естественный вопрос (впервые, вероятно, сформулированный Глазманом): можно ли заменить полуограниченность снизу потенциала (в приведенном выше результате Карлемана–Фридрихса о существенной самосопряженности) полуограниченностью самого оператора (т.е. полуограниченностью соответствующей квадратичной формы) на $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$? (В этом случае потенциал, возможно, не полуограничен снизу на некоторых относительно “малых” множествах.)

Оказывается, что если требовать только, что $V \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, то из полуограниченности снизу оператора H_V , вообще говоря, не вытекает его существенная самосопряженность, как можно увидеть из следующего примера (см. [43; пример 1a], [81; приложение 2] и в случае $n = 5$ также [64; пример 4, раздел X.2]):

D.1. Пример. Пусть $H_V = -\Delta + V$, где $V = \frac{\beta}{|x|^2}$ и $n \geq 5$. Тогда H_V существенно самосопряжен на $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $\beta \geq \beta_0 := 1 - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$. H_V полуограничен снизу тогда и только тогда, когда $\beta \geq -\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$. Первое утверждение следует из разделения переменных, и второе следует из неравенства Харди (см. [44]).

Первый результат о существенной самосопряженности полуограниченных дифференциальных операторов, вероятно, принадлежит Реллиху [65], который рассматривал одномерный случай и общий оператор Штурма–Лиувилля на интервале с одним или двумя сингулярными концами. В случае, когда $M = \mathbb{R}^n$, V непрерывен и $H_V = -\Delta + V$ полуограничен снизу, существенная самосопряженность оператора H_V доказана Повзнером [63; теорема 6, гл. I]. (Повзнер пишет, что этот результат был предложен Глазманом в качестве гипотезы в разговоре между ними. Это происходило не позднее 1952 года, когда была представлена к печати статья Повзнера. Непонятно, знал ли Глазман про существование работы Реллиха.) Приблизительно через полтора года после того, как работа Повзнера появилась в печати, вопрос о существенной самосопряженности полуограниченного оператора Шрёдингера H_V был поставлен Реллихом [66] в его Амстердамском докладе на Международном конгрессе математиков. Отвечая на вопрос Реллиха, Вингольц [93] доказал следующий результат.

ТЕОРЕМА D.2. Пусть $H_{g,b,V}$ эллипичен, $g^{jk} = g^{kj}$ ограничены класса $C^3(\mathbb{R}^n)$, $b_j \in C^3(\mathbb{R}^n)$, V – вещественная непрерывная функция. Предположим, что $H_{g,b,V}$ полуограничен снизу на $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Тогда он существенно самосопряжен.

(Понятно, что ни Реллих, ни Вингольц не знали о существовании работы Повзнера. Вингольц использовал более простой метод, чем Повзнер. Упрощенная версия результата Вингольца объяснена в книге [32].) Вингольц [93] также доказал такое же

утверждение в случае, когда вместо непрерывности требуется, чтобы потенциал V принадлежал глобальному классу типа Штуммеля.

Случай полуограниченного оператора H_V , на самом деле, существенно отличается от случая полуограниченного потенциала V . Это верно даже при $n = 1$, как становится ясно из примера Мозера, который описан Реллихом [65] и также цитируется Кальфом [40]. В этом примере приводится такой полуограниченный оператор Шрёдингера H_V в $L^2(\mathbb{R})$ с гладким потенциалом V , что $\text{Dom}(H_{V,\max})$ не содержится в $W^{1,2}(\mathbb{R})$, т.е. существует такое $u \in \text{Dom}(H_{V,\max})$, что $u' \notin L^2(\mathbb{R})$. Такое не может случиться, если V полуограничен снизу, как можно видеть, например, из предложения 8.13.

Имеется много работ, в которых требования гладкости на коэффициенты в теореме D.2 ослаблялись в разных направлениях (см., например, результаты, цитированные в [43]). В частности, важный шаг был сделан Зимадером [80], который рассматривал полуограниченный снизу оператор $H_V = -\Delta + V$ с $V = V_1 + V_2$, где $0 \leq V_1 \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и V_2 удовлетворяет локальному условию типа Штуммеля или локальному условию мажорирования. Доказательство основано на том наблюдении, что в данном случае $\text{Dom}(H_{V,\max}) \subset W^{1,2}_{\text{loc}}$ (это является самой трудной частью доказательства) и этого достаточно для существенной самосопряженности. Следуя [79], мы используем идеи Зимадера в геометрическом контексте данной работы.

Брезис [8] ввел еще одно локальное требование на V типа мажорирования (“локализованная” самосопряженность), из которого также вытекает существенная самосопряженность полуограниченного оператора H_V в $\mathbb{R}^n$. Заметим также, что Рофе-Бекетов и Кальф [70] объединили результаты Зимадера [80] и Брезиса [8], усовершенствовав использование локализованной самосопряженности.

Требования гладкости для метрических коэффициентов g^{jk} также можно ослабить. Например, Перельмутер и Семенов [62] доказали существенную самосопряженность оператора $H_{g,0,V}$ при условиях $V \geq 0$ и $g^{jk} - \delta_{jk} \in W^{1,4}(\mathbb{R}^n)$.

Результат типа Повзнера–Вингольца для матричнозначных операторов Штурма–Лиувилля на интервалах в $\mathbb{R}$, с коэффициентами в L^1_{loc} , установлен Кларком и Гештези в их недавнем препринте [19], который появился после того, как наша работа была представлена к печати.

Прокомментируем условие полноты в теореме 2.13. Это условие нельзя опустить. На самом деле, Уральцева [88] и Лаптев [51] показали, что существуют такие эллиптические операторы $H_{g,0,0}$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$, т.е. операторы вида

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g^{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x^k} \right)$$

с гладкой положительно определенной матрицей g^{jk} , что пространство $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ не плотно в максимальной области определения $Q_{\max}$ соответствующей квадратичной формы. Если этот факт имеет место, то оператор $H_{g,0,0}$ не является существенно самосопряженным. Это происходит из-за “быстрого роста” функций g^{jk} , откуда следует “быстро убывание” элементов обратной матрицы g_{jk} , что означает неполноту пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой g_{jk} . (Лаптев [51] также дал некоторые достаточные условия, которые гарантируют плотность пространства $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $Q_{\max}$.)

Удивительным фактом является то, что, как установил Мазья [56] (см. также [57; раздел 2.7]), случаи $n = 1, 2$ являются здесь специальными. Используя емкости, он доказал, что $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ всегда плотно в $Q_{\max}$ в случае, если $n = 1$ или $n = 2$.

Может случиться так, что неполнота метрики компенсируется специфическим поведением потенциала V . Тем самым, оператор $H_{g,b,V}$ самосопряжен, хотя метрика g не полна (см., например, [12], [13], [22; гл. 4] и приведенные там ссылки).

Сделаем некоторые комментарии по поводу операторов типа Шрёдингера, которые, возможно, не полуограничены снизу. Первый результат типа приведенного в теореме 2.7 (но в $M = \mathbb{R}^n$ со стандартными метрикой и мерой и с $q = q(|x|)$) для $H_V = -\Delta + V$, где $V \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, принадлежит Сирсу [73] (см. также [86; разделы 22.15 и 22.16], [5; гл. 3, теорема 1.1]), который следовал идее более ранней работы Титчмарша [85]. Рофе-Бекетов [68], по-видимому, был первым, кто позволил миноранте $q(x)$ не быть радиально симметричной, хотя он не сформулировал свои условия геометрически. Он также доказал, что локальное неравенство $V \geq -q$ можно заменить операторным неравенством

$$H_V \geq -\delta\Delta - q(x)$$

с некоторой постоянной $\delta > 0$. Этот факт позволяет рассматривать некоторые потенциалы, которые не ограничены снизу даже локально. Олейник [58]–[60] продемонстрировал, что данный факт распространяется на случай многообразий. Олейник также привел геометрическое условие самосопряженности, связывающее ее с классической полнотой в ситуации, которая является не радиально симметричной. Доказательство Олейника было упрощено Шубиным [77], и затем этот результат был распространен в работе [78] на случай магнитных операторов Шрёдингера.

Первый результат типа Сирса для $H_{b,V}$ с локально сингулярным потенциалом V получен Икэбэ и Като [37] (все еще с радиальной минорантой для V). Работа [78] распространяет этот результат на полные римановы многообразия, разрешает не радиально симметричные миноранты для V с условием полноты типа Олейника, хотя требует, чтобы V был локально ограниченным. К настоящему моменту мы можем также позволить подходящие сингулярности потенциала V для магнитных операторов Шрёдингера, рассматриваемых в [78], поскольку такие операторы являются частным случаем операторов, допускаемых в теореме 2.7.

Замечательный результат типа Сирса, принадлежащий Ивацукэ [38], по-видимому, является единственным результатом, который явно принимает во внимание непосредственное участие в существенной самосопряженности магнитного поля. В этом результате возрастание магнитного поля на бесконечности позволяет скалярному потенциалу V быстрее убывать на $-\infty$. (Это убывание, в действительности, может быть произвольно быстрым в зависимости от роста магнитного поля.)

Левитан [54] предложил новое доказательство теоремы Сирса, основанное на рассмотрении гиперболической задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Hu = 0, \quad u|_{t=0} = f, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = g, \quad (\text{D.2})$$

где H – исследуемый симметрический дифференциальный оператор (например, $H = H_{g,b,V}$, как в (D.1)). Предположим на мгновение, что H неотрицателен (или полуограничен снизу) на $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда существенная самосопряженность оператора H следовала бы, если бы мы знали, что для любых $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ задача (D.2) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $L^2(\mathbb{R}_x^n)$ для любого $t \in \mathbb{R}$ (или

даже $t \in [0, t_0]$ с некоторым $t_0 > 0$), потому что различные самосопряженные расширения, вообще говоря, давали бы, согласно спектральной теореме, различные решения. В свою очередь, единственность следует (по принципу Хольмгрена) из существования при условии, что гарантирована глобально конечная скорость распространения, т.е. если для любого $t_0 > 0$, любого ограниченного открытого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ и любых $f, g \in C_c^\infty(G)$ существует такое ограниченное открытое множество $\Omega \supset G$, что задача (D.2) имеет такое решение $u(t, x) \in C^\infty([0, t_0] \times \mathbb{R}^n)$, что $\text{supp } u(t, x) \subset \Omega$ для всех $t \in [0, t_0]$. Модификация этого рассуждения позволяет также рассматривать неполуограниченные операторы. Установление глобально конечной скорости распространения задачи (D.2) является главной компонентой в доказательстве существенной самосопряженности.

Хорошее объяснение абстрактного подхода, основанного на гиперболическом уравнении, можно найти в книге Березанского [4; гл. VI, раздел 1.7]. Дополнительные подробности о методе гиперболического уравнения можно найти в работе Орошко [61], которая также содержит хороший обзор со многими существенными ссылками.

Книга Березанского [4] также содержит всестороннее обсуждение существенной самосопряженности операторов, порожденных краевыми задачами для эллиптических и более общих операторов.

До сих пор мы предполагали, что, по крайней мере, $V \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$, что позволяет определить минимальный оператор на $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Однако Като [49] отметил, что если $V \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, то все еще можно рассматривать максимальный оператор $H_{V, \max}$, ассоциированный с оператором $H_V = -\Delta + V$, как оператор с областью определения

$$\text{Dom}(H_{V, \max}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : Vu \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n) \text{ и } H_V u \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

где $H_V u$ априори определена как обобщенная функция. Вопрос, который тогда можно поставить, состоит в том, является ли оператор $H_{V, \max}$ самосопряженным. Кроме того, минимальный оператор $H_{V, \min}$ определяется тогда как ограничение оператора $H_{V, \max}$ на финитные элементы $\text{Dom}(H_{V, \max})$. В данном случае можно спросить, верно ли, что оператор $H_{V, \min}$ плотно определен и $H_{V, \min}^* = H_{V, \max}$. Также можно рассматривать более общие операторы вида (D.1). Мы отсылаем читателя к работам [50], [27], [42] и [61] за результатами и ссылками в этом направлении. В частности, в [61] изучались локально интегрируемые потенциалы при помощи метода гиперболического уравнения.

Обсудим некоторые результаты о существенной самосопряженности для операторов на многообразиях. Существенная самосопряженность оператора Лапласа–Бельтрами на полном римановом многообразии была установлена Гафни [30] (не только в $L^2(M)$, но также и в стандартных L^2 -пространствах дифференциальных форм). Кордес [21] (см. также [22; гл. 4]) установил существенную самосопряженность степеней операторов типа Шрёдингера с положительными потенциалами (в L^2 -пространствах, определенных мерой, которая, как и в настоящей работе, не связана с метрикой). Это было сделано им не только на полных римановых многообразиях, но также и в том случае, когда неполнота компенсируется подходящим поведением потенциала, например, в областях $G \subset M$ на полном римановом многообразии M , если потенциал $V(x)$ оценивается снизу величиной $\gamma(\text{dist}(x, \partial G))^{-2}$ с подходящей постоянной $\gamma > 0$. Кордес использует “стационарный” подход. Чернофф [16] использовал подход, основанный

на гиперболическом уравнении, для того, чтобы установить аналогичные результаты. (В более поздней работе [17] он распространил свои результаты на случай сингулярных потенциалов V .) Мы отсылаем читателя к книге Кордеса [22; гл. 4] за другими результатами на эти темы. Като [48] распространил рассуждения Черноффа из [16], чтобы доказать существенную самосопряженность степеней оператора H_V , где $H_V \geq -a - b|x|^2$ и V — гладкий потенциал (в случае, когда $H_V = -\Delta + V$ в $M = \mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой и мерой). Чумак [18] использовал метод гиперболического уравнения, чтобы доказать существенную самосопряженность полуограниченных снизу операторов $H_{g,0,V}$ на полных римановых многообразиях.

Также заслуживает упоминания тонкий результат Доннелли и Гарофало [24], которые доказали существенную самосопряженность для оператора $H_V = -\Delta + V$ на полном римановом многообразии при том ограничении, что потенциал V локально принадлежит классу типа Штуммеля, исключая точку x_0 , и имеет такую отрицательную миноранту $Q(x)$, что $Q(x) = \beta_0(\text{dist}(x, x_0))^{-2}$ вблизи x_0 (что в точности согласуется с пограничным случаем в примере D.1, тем самым, это практически оптимально) и около бесконечности $Q(x) = -c(\text{dist}(x, x_0))^2$ с постоянной $c > 0$.

По поводу некоторых других близких результатов об операторах типа Шрёдингера на многообразиях см., например, библиографию в [22], [77]–[79]. По поводу операторов высших порядков в $\mathbb{R}^n$ см. [72] и [69]. По поводу операторов высших порядков на многообразиях ограниченной геометрии см. [75].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. A. Adams. Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975.
- [2] M. Aizenman, B. Simon. Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger operators // Comm. Pure Appl. Math. 1982. V. 35. № 2. P. 209–273.
- [3] R. Beals. On spectral theory and scattering for elliptic operators with singular potentials // Pacific J. Math. 1971. V. 37. P. 7–20.
- [4] Ю. М. Березанский. Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
- [5] Ф. А. Березин, М. А. Шубин. Уравнение Шрёдингера. М.: Изд-во МГУ, 1983.
- [6] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne. Heat Kernels and Dirac Operators. Berlin: Springer-Verlag, 1992. (Grundlehren Math. Wiss. V. 298.)
- [7] M. Braverman. On self-adjointness of Schrödinger operator on differential forms // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. № 2. P. 617–623.
- [8] H. Brézis. “Localized” self-adjointness of Schrödinger operators // J. Operator Theory. 1979. V. 1. P. 287–290.
- [9] H. Brézis, F. E. Browder. Sur une propriété des espaces de Sobolev // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. 1978. V. 287. P. 113–115.
- [10] H. Brézis, F. E. Browder. A property of Sobolev spaces // Comm. Partial Differential Equations. 1979. V. 4. P. 1077–1083.
- [11] H. Brézis, F. E. Browder. Some properties of higher order Sobolev spaces // J. Math. Pures Appl. (9). 1982. V. 61. P. 245–259.
- [12] А. Г. Брусенцев. О самосопряженности в существенном полуограниченных эллиптических операторов второго порядка, не подчиненных условию полноты риманова многообразия // Матем. физ., анализ, геом. 1995. Т. 2. № 2. С. 152–167.
- [13] А. Г. Брусенцев. Поведение около границы потенциала эллиптического оператора, гарантирующее его самосопряженность в существенном // Матем. физ., анализ, геом. 1998. Т. 5. № 3/4. С. 149–165.
- [14] T. Carleman. Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrödinger // Ark. Mat. Astron. Fys. 1934. V. 24B. № 11. P. 1–7.

- [15] C. Cascante, J. Ortega, I. Verbitsky. Trace inequalities of Sobolev type in the upper triangle case // *Proc. London Math. Soc.* (3). 2000. V. 80. №2. P. 391–414.
- [16] P. Chernoff. Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations // *J. Funct. Anal.* 1973. V. 12. P. 401–414.
- [17] P. Chernoff. Schrödinger and Dirac operators with singular potentials and hyperbolic equations // *Pacific J. Math.* 1977. V. 72. №2. P. 361–382.
- [18] А. А. Чумак. Самосопряженность оператора Бельтрами–Лапласа на полном паракомпактном многообразии без края // *Укр. матем. журн.* 1973. Т. 25. №6. С. 784–791.
- [19] S. Clark, F. Gesztesy. On Povzner–Wienholtz-type self-adjointness results for matrix-valued Sturm–Liouville operators // *Preprint math.SP/0203141*, 2002.
- [20] Э. Коддингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
- [21] H. O. Cordes. Self-adjointness of powers of elliptic operators on non-compact manifolds // *Math. Ann.* 1972. V. 195. P. 257–272.
- [22] H. O. Cordes. *Spectral Theory of Linear Differential Operators and Comparison Algebras*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 76.)
- [23] Х. Цикон, Р. Фрёзе, В. Кирш, Б. Саймон. Операторы Шрёдингера с приложениями в квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.
- [24] H. Donnelly, N. Garofalo. Schrödinger operators on manifolds, essential self-adjointness, and absence of eigenvalues // *J. Geom. Anal.* 1997. V. 7. №2. P. 241–257.
- [25] Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы. II. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1963.
- [26] D. E. Edmunds, W. D. Evans. *Spectral Theory and Differential Operators*. Oxford: Clarendon Press, 1987.
- [27] M. Faierman, I. Knowles. Minimal operators for Schrödinger-type differential expressions with discontinuous principal coefficients // *Canad. J. Math.* 1980. V. 32. №6. P. 1423–1437.
- [28] K. Friedrichs. Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren. I, II // *Math. Ann.* 1934. V. 109. P. 465–487; 685–713.
- [29] K. Friedrichs. The identity of weak and strong extensions of differential operators // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1944. V. 55. P. 132–151.
- [30] M. Gaffney. A special Stokes’s theorem for complete Riemannian manifolds // *Ann. of Math.* (2). 1954. V. 60. P. 140–145.
- [31] И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин. Обобщенные функции, вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М.: Физматлит, 1961.
- [32] И. М. Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1963.
- [33] E. Hebey. *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*. New York: New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1999. (Courant Lect. Notes Math. V. 5.)
- [34] G. Hellwig. *Differential Operators of Mathematical Physics. An Introduction*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1967.
- [35] H. Hess, R. Schrader, D. A. Uhlenbrock. Kato’s inequality and the spectral distribution of Laplacians on compact Riemannian manifold // *J. Differential Geom.* 1980. V. 15. P. 27–37.
- [36] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I. Distribution Theory and Fourier Analysis*. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1990. Рус. пер. 1-го изд.: Л. Хёрмандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I. М.: Мир, 1986.
- [37] T. Ikebe, T. Kato. Uniqueness of self-adjoint extension of singular elliptic differential operators // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1962. V. 9. P. 77–92.
- [38] A. Iwatsuka. Essential self-adjointness of the Schrödinger operators with magnetic fields diverging at infinity // *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 1990. V. 26. №5. P. 841–860.

- [39] H. Kalf. Self-adjointness for strongly singular potentials with $a - |x|^2$ fall-off at infinity // Math. Z. 1973. V. 133. P. 249–255.
- [40] H. Kalf. Remarks on some Dirichlet type results for semibounded Sturm–Liouville operators // Math. Ann. 1974. V. 210. P. 197–205.
- [41] H. Kalf. Gauss's theorem and the self-adjointness of Schrödinger operators // Ark. Mat. 1980. V. 18. P. 19–47.
- [42] H. Kalf, F. S. Roze-Beketov. On the essential self-adjointness of Schrödinger operators with locally integrable potentials // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1998. V. 128. №1. P. 95–106.
- [43] H. Kalf, U.-W. Schmincke, J. Walter, R. Wüster. On the spectral theory of Schrödinger and Dirac operators with strongly singular potentials // Lecture Notes in Math. 1975. V. 448. P. 182–226.
- [44] H. Kalf, J. Walter. Strongly singular potentials and the essential self-adjointness of singular elliptic operators in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ // J. Funct. Anal. 1972. V. 10. P. 114–130.
- [45] H. Karcher. Riemannian center of mass and mollifier smoothing // Comm. Pure Appl. Math. 1977. V. 30. P. 509–541.
- [46] T. Kato. Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type // Trans. Amer. Math. Soc. 1951. V. 70. P. 195–211.
- [47] T. Kato. Schrödinger operators with singular potentials // Israel J. Math. 1972. V. 13. P. 135–148.
- [48] T. Kato. A remark to the preceding paper by Chernoff // J. Funct. Anal. 1973. V. 12. P. 415–417.
- [49] T. Kato. A second look at the essential self-adjointness of the Schrödinger operators // Physical Reality and Mathematical Description. Dordrecht: Reidel, 1974. P. 193–201.
- [50] I. Knowles. On the existence of minimal operators for Schrödinger-type differential expressions // Math. Ann. 1978. V. 233. №3. P. 221–227.
- [51] С. А. Лаптев. О замыкании в метрике обобщенного интеграла Дирихле // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. №4. С. 727–736.
- [52] H. Leinfelder, C. Simader. Schrödinger operators with singular magnetic vector potentials // Math. Z. 1981. V. 176. P. 1–19.
- [53] M. Lesch. Essential self-adjointness of symmetric linear relations associated to first order systems // Journées “Équations aux Dérivées Partielles” (La Chapelle sur Erdre). Exp. № X. Nantes: Univ. Nantes, 2000.
- [54] Б. М. Левитан. Об одной теореме Тичмарша и Сьерса // УМН. 1961. Т. 16. №4. С. 175–178.
- [55] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1970.
- [56] В. Г. Мазья. О замыкании в метрике обобщенного интеграла Дирихле // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1967. Т. 5. С. 192–195.
- [57] В. Г. Мазья. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
- [58] И. М. Олейник. О существенной самосопряженности оператора Шрёдингера на полных римановых многообразиях // Матем. заметки. 1993. Т. 54. №3. С. 89–97.
- [59] И. М. Олейник. О связи классической и квантовомеханической полноты потенциала на бесконечности на полном римановом многообразии // Матем. заметки. 1994. Т. 55. №4. С. 65–73.
- [60] I. Oleinik. On the essential self-adjointness of the general second order elliptic operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 127. №3. P. 889–900.
- [61] Ю. Б. Орочко. Метод гиперболического уравнения в теории операторов типа Шрёдингера с локально интегрируемым потенциалом // УМН. 1988. Т. 43. №2. С. 51–102.
- [62] М. А. Перельмутер, Ю. А. Семенов. О существенной самосопряженности эллиптических операторов второго порядка с измеримыми коэффициентами // Укр. матем. журн. 1985. Т. 37. №2. С. 191–197.
- [63] А. Я. Повзнер. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $\Delta u + cu$ // Матем. сб. 1953. Т. 32 (74). №1. С. 109–156.

- [64] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 1: Функциональный анализ. Т. 2: Анализ Фурье, самосопряженность. М.: Мир, 1977, 1978.
- [65] F. Rellich. Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung // Math. Ann. 1951. V. 122. P. 343–368.
- [66] F. Rellich. Halbbeschränkte Differentialoperatoren höherer Ordnung // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam. V. III. Amsterdam: North-Holland, 1956. P. 243–250.
- [67] J. Roe. An index theorem on open manifolds. I, II // J. Differential Geom. 1988. V. 27. №1. P. 87–113, 115–136.
- [68] Ф. С. Рофе-Бекетов. Условия самосопряженности оператора Шрёдингера // Матем. заметки. 1970. Т. 8. №6. С. 741–751.
- [69] Ф. С. Рофе-Бекетов. Самосопряженность эллиптических операторов высших порядков и оценки энергетического типа во всем $\mathbb{R}^n$ // Теория функций, функц. анализ. и их прил. 1991. Т. 56. С. 35–46.
- [70] Ф. С. Рофе-Бекетов, Х. Кальф. О существенной самосопряженности неполуограниченных операторов Шрёдингера // Матем. исследования. 1997. Т. 7. №1. С. 53–58.
- [71] M. Schechter. On the invariance of the essential spectrum of an arbitrary operator. II // Ricerche Mat. 1967. V. 16. P. 3–26.
- [72] M. Schechter. Spectra of Partial Differential Operators. 2nd ed. Amsterdam: North-Holland, 1986. (North-Holland Ser. Appl. Math. Mech. V. 14.)
- [73] D. B. Sears. Note on the uniqueness of Green's functions associated with certain differential equations // Canad. J. Math. 1950. V. 2. P. 314–325.
- [74] М. А. Шубин. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978.
- [75] M. A. Shubin. Spectral theory of elliptic operators on non-compact manifolds // Astérisque. 1992. V. 207. P. 35–108.
- [76] M. A. Shubin. Semiclassical asymptotics on covering manifolds and Morse inequalities // Geom. Funct. Anal. 1996. V. 6. №2. P. 370–409.
- [77] M. A. Shubin. Classical and quantum completeness for Schrödinger operators on non-compact manifolds // Geometric Aspects of Partial Differential Equations. Proceedings of a symposium, Roskilde, 1998. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. P. 257–269. (Contemp. Math. V. 242.)
- [78] M. A. Shubin. Essential self-adjointness for magnetic Schrödinger operators on non-compact manifolds // Sémin. Équ. Dériv. Partielles, 1999, Exp. № XV.
- [79] M. A. Shubin. Essential self-adjointness for semibounded magnetic Schrödinger operators on non-compact manifolds // J. Funct. Analysis. 2001. V. 186. №1. P. 92–116.
- [80] C. Simader. Essential self-adjointness of Schrödinger operators bounded from below // Math. Z. 1978. V. 159. P. 47–50.
- [81] B. Simon. Essential self-adjointness of Schrödinger operators with positive potentials Math. Ann. 1973. V. 201. P. 211–220.
- [82] B. Simon. Schrödinger semigroups // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1982. V. 7. №3. P. 447–526; Erratum // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1984. V. 11. №2. P. 426.
- [83] B. Simon. Schrödinger operators in the twentieth century // J. Math. Phys. 2000. V. 41. №6. P. 3523–3555.
- [84] F. Stummel. Singuläre elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschen Räumen // Math. Ann. 1956. V. 132. P. 150–176.
- [85] E. C. Titchmarsh. On the uniqueness of the Green's function associated with a second-order differential equation // Canad. J. Math. 1949. V. 1. P. 191–198.
- [86] Э. Титчмарш. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. II. М.: ИЛ, 1961.
- [87] H. Triebel. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. 2nd ed. Heidelberg: Barth, 1995. Рус. пер. 1-го изд.: Х. Трибель. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
- [88] Н. Н. Уралцева. Несамосопряженность в $L_2(\mathbb{R}^n)$ эллиптического оператора с быстро растущими коэффициентами // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1969. Т. 14. С. 288–294.

- [89] Ф. Уорнер. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987.
- [90] H. Weyl. Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen // Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. 1909. P. 37–63.
- [91] H. Weyl. Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, 2. Note // Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. 1910. P. 442–467.
- [92] H. Weyl. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen // Math. Ann. 1910. V. 68. P. 220–269.
- [93] E. Wientholtz. Halbbeschränkte partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung vom elliptischen Typus // Math. Ann. 1958. V. 135. P. 50–80.

Northeastern University, Boston, USA

E-mail: maxim@neu.edu; ogmilato@lynx.dac.neu.edu;

shubin@neu.edu

Поступила в редакцию

31.03.2002