Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Горин, Фрагменты научной биографии Д. А. Райкова: гармонический анализ, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 5, 157–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5325>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 11:51:11

УДК 517.986

К 100-летию со дня рождения

Фрагменты научной биографии Д. А. Райкова: гармонический анализ

Е. А. Горин

Приводятся основные биографические сведения о Д. А. Райкове, его научных интересах, публикациях, ближайших учениках. Дано доступное описание научных достижений Д. А. Райкова в абстрактном гармоническом анализе и некоторых направлений их дальнейшего развития.

Библиография: 22 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Предисловие	157
§ 2. Вероятность и теория чисел	160
§ 3. Положительно-определенные функции на группах	162
§ 4. Групповые алгебры	164
§ 5. Алгебры с инволюцией	165
§ 6. Дополнительные примеры	166
Список литературы	171

§ 1. Предисловие

К условным ученикам Д. А. Райкова можно отнести большинство русского-говорящих математиков XX века, поскольку многие из нас учились по книгам, написанным его рукой: учебникам, монографиям, переводам, снабженным его предисловиями и комментариями.

В свое время практически все аспиранты-математики использовали двухтомник алгебры Ван дер Вардена и задачник Пойа и Сегё. В 50-е годы, когда научные интересы самого Д. А. переместились в область топологических векторных пространств, он сам и его ученики перевели на русский язык несколько удачных руководств по этому предмету. Д. А. и сам написал очень полезное введение в теорию векторных пространств.

Многие учились по знаменитой статье в УМН и книге трех авторов (И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилев) по банаховым алгебрам и по монографии Люмиса по абстрактному гармоническому анализу, и нет числа тем, кто обращался к 1000-страничному двухтомнику Б. Н. Делоне и Д. А. Райкова по аналитической геометрии. Целые поколения студентов

учились по оригинальным учебникам Д. А. Райкова по математическому анализу (ориентированным на математические факультеты пединститутов).

Эти сочинения, выходявшие на протяжении более 50 лет, в заметной мере сохраняют актуальность и по сей день. Нельзя не отметить и большой вклад, который внес Д. А. в формирование современного математического русского языка.

О личной жизни Д. А. написано мало. Краткие биографические данные дает «Математика в СССР за сорок лет» [1], где в первом томе на с. 579–580 написано (самим Д. А., на что указывает справочник) буквально следующее:

Райков Дмитрий Абрамович, род. 11 нояб. (29 окт.) 1905 г. в г. Одессе, окончил Московский ун-т (1929), д-р физ.-мат. наук (1941), профессор (1950), в 1933–1935 работал в Воронежском ун-те, в 1935–1943 – в Гостехиздате, в 1938–1948 – в Матем. ин-те АН, в 1949–1952 – в Костромском пед. ин-те, в 1952–1956 – в Шуйском пед. ин-те, с 1957 работает в Московском гос. пед. ин-те.

Эти произнесенные скороговоркой даты многое (но не все) скажут людям старшего и среднего поколения. Сам Д. А. говорил, что одесская действительность начала века оказала сильное влияние на его формирование. В войну Д. А. оказался в ополчении, имел правительственные награды, был демобилизован по ранению.

Из Шуи Д. А. пригласил в Москву П. С. Новиков, который тогда заведовал кафедрой математического анализа в Московском пединституте им. В. И. Ленина (бывшие Высшие женские курсы, ныне – МПГУ). Петр Сергеевич хорошо знал Райкова. Время было сложное, однако П. С. был масштабной личностью, и в результате Д. А. плодотворно проработал в Московском пединституте до конца жизни, читал спецкурсы и руководил аспирантами в МГУ, активно сотрудничал в математических редакциях.

Журнал «Успехи математических наук» неоднократно печатал научные статьи и заметки Д. А., однако (по причинам, не всем понятным) никогда не писал о нем лично. К 75-летию Д. А. появилась посвященная ему короткая статья в «Математике в школе», составленная его сотрудниками по кафедре – П. В. Семеновым и В. П. Федоровой, а через несколько месяцев там же появился и некролог (Д. А. Райков умер в самом конце декабря 1980 г.). Значительно позже, в 2004 г., в МПГУ вышел сборник [2], посвященный 70-летию кафедры математического анализа (этой кафедрой до П. С. Новикова заведовали А. Я. Хинчин и Ф. Р. Гантмахер). В сборнике есть короткие статьи с воспоминаниями о Д. А., одна, написанная В. П. Федоровой, и вторая, написанная В. С. Сековановым, одним из последних прямых учеников Д. А.¹ Вообще среди многочисленных прямых учеников Д. А. по общему мнению прежде всего надо назвать следующих: Л. В. Апарина, И. А. Березанский, Д. В. Ботнару, Б. С. Брудовский, М. М. Буняев, Ю. Н. Владимирский, В. Б. Гисин, А. С. Дынин, П. С. Кендеров, В. Л. Левин, А. Е. Мерзон, А. Х. Назиев, И. И. Подгорная, В. С. Ретах, В. С. Секованов, В. П. Федорова, В. Е. Холодовский.

¹ К настоящему времени в МПГУ вышел сборник, приуроченный к 100-летию со дня рождения Д. А. Райкова, и проведены некоторые другие мероприятия, связанные с этим событием.

Я добавил бы к этому, что многие имели полезные неформальные контакты с Д.А.² В середине 50-х годов Д.А. читал спецкурсы по топологическим векторным пространствам в МГУ. Мы с Б. С. Митягиным, хотя и слушали лекции Д.А., к тому моменту уже были тесно связаны с Г. Е. Шиловым и решили одну задачку по векторным пространствам, которую Г.Е. предложил на своем спецкурсе. Из редакции УМН наша заметка попала к Д.А., он добавил к ней текст, по объему сравнимый с исходным и привел ее к “нормальному виду” (мы по неопытности не сообразили пригласить его в соавторы, хотя и по содержанию добавления Райкова, пожалуй, не уступали исходному тексту). Так появилась наша первая публикация.

Д.А. был рецензентом моей дипломной работы, а через 12 лет – официальным оппонентом по докторской диссертации. До самого конца у меня сохранялись с ним ровные отношения. Сейчас я “завершаю свою трудовую деятельность” на той же кафедре, на которой все последние годы работал Д. А. Райков, о чем на кафедре напоминает его портрет (кстати, Д.А. когда-то приглашал меня перейти на эту кафедру из МГУ, однако это состоялось гораздо позже, и вместе нам работать не довелось).

Что касается упомянутых выше статей о Д. А. Райкове, то стоит отметить, что они написаны эмоционально, с любовью, однако (по законам жанра) математической информации в них мало. К тому же эти статьи опубликованы в мало доступных изданиях (которые к тому же не реферируются и не переводятся).

Вместе с тем, собственно математические работы Д.А. и его учебники описаны лучше. Есть статьи в “Математике в СССР” за 30 лет [3], за 40 лет [1; т. 1], список публикаций до 1967 г. включительно во 2-м томе “Математики в СССР 1958–1967” [4] (1-й том со статьями не вышел), а описание всего остального можно при желании найти в РЖ “Математика” или Mathematical Reviews. Заметная часть работ Д.А. отражена в учебниках теории вероятностей, теории чисел, в книгах по абстрактному гармоническому анализу и теории топологических векторных пространств.

В этой статье я опишу лишь некоторые математические сюжеты, с которыми имел дело Д. А. Райков и которые лично мне несколько ближе, чем остальное. Например, я совсем не буду касаться его учебников и научно-методических открытий. Работам Д. А. Райкова по топологическим векторным пространствам и элементам теории категорий должны быть посвящены отдельные тексты. Вместе с тем, я упомяну некоторые известные мне результаты других авторов (в том числе и свои), достаточно тесно связанные с исследованиями Д.А.

Разумеется, я не претендую ни на полноту, ни на объективность, однако я постараюсь быть понятным.³

²О чем бы я ни писал, я пишу о себе.

³Я благодарю А.Е. Мерзона, В.С. Ретаха и В.П. Федорову за предоставленную мне обширную библиографическую информацию, уточнение списка ближайших учеников Д. А. Райкова и ряд замечаний, которые я постарался учесть. Я приношу искренние извинения тем из учеников Д. А. Райкова, которых (быть может) я здесь не назвал.

§ 2. Вероятность и теория чисел

Теорией вероятностей Д. А. Райков начал заниматься под руководством А. Я. Хинчина. Быть может, от Хинчина он воспринял и интерес к теории чисел. В дальнейшем он перешел к гармоническому анализу, однако и в теории вероятностей, и в теории чисел Д. А. интересовали такие задачи, которые непосредственно связаны с сформировавшимися в 30-е годы общими понятиями (абстрактного) гармонического анализа.

В соответствии с аксиоматикой А. Н. Колмогорова скалярная случайная величина ξ – это измеримое отображение $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ пространства с вероятностной мерой $\{\Omega, P\}$ (так что $P(\Omega) = 1$) в вещественную ось $\mathbb{R}$.

Распределением случайной величины ξ называется борелевская мера μ на $\mathbb{R}$, которая на стрелках $[a, b)$ определяется равенством

$$\mu([a, b)) = P(\{\omega \in \Omega \mid a \leq \xi(\omega) < b\}).$$

Функция распределения $F_\xi = F_\xi(t)$ определяется равенством $F_\xi(t) = \mu((-\infty, t))$. Заметим, что при таком определении функция F_ξ непрерывна слева (а если, как зачастую делают, *включить* правый конец t , получится непрерывность справа).

Преобразование Фурье меры μ называется характеристической функцией распределения ξ . Таким образом, при вещественных x характеристическая функция $f(x)$ может быть представлена несколькими способами:

$$\begin{aligned} f(x) &= M(e^{ix\xi}) \\ &= \int_{\Omega} e^{ix\xi(\omega)} P(d\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} \mu(dt) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} dF_\xi(t), \end{aligned}$$

где M – знак математического ожидания, две следующие строчки включают интегралы Лебега, а последняя – интеграл Стильеса. Имеется внутреннее описание характеристических функций, на чем мы остановимся ниже.

Связь между распределениями и отвечающими им характеристическими функциями проще и прозрачнее, чем связь между общими мерами ограниченной вариации и их преобразованиями Фурье (хотя и в случае вероятностных мер эту связь нельзя назвать тривиальной). Например, если характеристическая функция $f(x)$ продолжается до аналитической в диске $|z| < a$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то для распределения справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} e^{b|t|} \mu(dt) < \infty$$

при всех $b < a$ (обратное очевидно), и тогда f продолжается до аналитической в полосе $|\operatorname{Im} z| < a$. В частности, f продолжается до целой функции тогда и только тогда, когда указанный интеграл сходится при всех $b > 0$.

Упорядоченная пара ξ_1, ξ_2 скалярных случайных величин естественно порождает меру в $\mathbb{R}^2$, которая называется совместным распределением этих величин. В рамках колмогоровской аксиоматики случайные величины ξ_1, ξ_2 *независимы*, если их совместное распределение есть прямое произведение $\mu_1 \times \mu_2$ распределений компонент. В этом случае распределение суммы $\xi_1 + \xi_2$ есть свертка $\mu_1 * \mu_2$ и, следовательно, характеристическая функция суммы есть произведение характеристических функций компонент, $\hat{\mu}_1 \cdot \hat{\mu}_2$.

Из очень простых соображений вытекает, что компоненты свертки распределений далеко не произвольны. В частности, привлекая теорему Фубини, получаем, что компоненты целой характеристической функции сами будут целыми. Уточнение этого наблюдения приводит к теореме Крамера: компоненты нормального распределения нормальны. Д. А. Райков в 1938 г. установил, что аналогичная теорема имеет место и для распределения Пуассона. Поскольку характеристическая функция распределения Пуассона,

$$f_\lambda(x) = e^{\lambda(e^{ix} - 1)},$$

выглядит заметно сложнее, чем e^{-x^2} , и теорема Райкова выглядит сложнее теоремы Крамера.

Эти результаты породили целые направления. С одной стороны, арифметика вероятностных распределений в $\mathbb{R}^n$ благодаря дальнейшим работам Ю. В. Линника, И. В. Островского, Г. П. Чистякова (см., в частности, [5] [6]) и других превратилась в глубокую и далеко продвинутую теорию с обилием тонких аналитических результатов. Заметим, что изложение результатов, полученных в этом направлении до конца 70-х годов, имеется в монографии Лукача [7] (и примечаниях переводчика В. М. Золотарёва). С другой стороны, начиная с П. Леви стали заниматься вероятностными распределениями на других группах, например, на окружности $\mathbb{T}$. В частности, Марцинкевич обнаружил, что для группы $\mathbb{T}$ нет аналога теоремы Крамера, а существенно позже Г. М. Фельдман показал, что наличие в группе топологической копии группы $\mathbb{T}$ – единственное препятствие к нормальности компонент нормального распределения. Многочисленные результаты такого типа изложены в его монографии [8].

Относящиеся к теории чисел исследования Д. А. Райкова связаны с доказательством асимптотического закона распределения простых чисел⁴. Хотя формулировку PNT (и далеко идущих обобщений) знал Гаусс, очень близки к доказательству были П. Л. Чебышёв и Риман, первое аккуратное доказательство нашли Адамар и Валле Пуссен. Один из центральных моментов доказательства составляет неравенство $\zeta(1 + it) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Кстати, широко известное доказательство этого факта, основанное на тригонометрическом неравенстве, придумал Мертенс. Ниже я расскажу, как доказать, что $\zeta(1 + it) \neq 0$, используя только весьма общие соображения, связанные с понятием положительной определенности.

Пусть $\pi(x)$ – количество простых p , меньших, чем x . При натуральном n положим $\Lambda(n) = \log p$, если n есть степень какого-нибудь простого числа p и

⁴В англоязычных текстах используется (по-моему, вполне вразумительная) аббревиатура PNT (от Prime Number Theorem), и мы будем использовать это сокращение.

$\Lambda(n) = 0$ во всех остальных случаях (функция Мангольдта). Функция

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

называется функцией Чебышёва. Еще Чебышёв знал, что соотношение $\psi(x) \sim x$ при $x \rightarrow \infty$ эквивалентно PNT, т.е. соотношению $\pi(x) \sim x/\log x$. Легко проверяется соотношение

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \frac{\psi(u) du}{u^{s+1}}.$$

Поэтому PNT получится, если по асимптотике преобразования Лапласа меры научиться определять асимптотику меры на бесконечности. Теоремы такого типа называются тауберовыми, и Д.А. занимался обобщением так называемой тауберовой теоремы Винера–Икеары. Законченную форму это обобщение приобрело существенно позже в работе Деланжа. Укажем, кстати, на очень содержательный обзор тауберовой теории [9] (не включающий, правда, алгебраический подход Гельфанда–Шилова).

Есть две публикации Д.А. конца 30-х годов, посвященные теоремам Л. Г. Шнирельмана о плотности арифметической суммы двух множеств натуральных чисел.

Особняком стоит написанная в те же годы небольшая заметка Д.А. о локальном равномерном приближении, содержащая, казалось бы, очень простое наблюдение: скорость приближения (полиномами) зависит не только от гладкости приближаемой функции, но и от величины промежутка, на котором происходит приближение. В середине 60-х годов это наблюдение стало исходным фактом красивой теории локальных приближений, построенной Ю. А. Брудным (см., в частности, [10]).

§ 3. Положительно-определенные функции на группах

Работа Д.А. по гармоническому анализу началась в очень интересный исторический период⁵. Незадолго до этого в самостоятельную дисциплину оформилась общая топология, появилась теория банаховых пространств, спектральный анализ в гильбертовом пространстве становился языком новой физики, была построена структурная теория и теория двойственности для локально компактных абелевых групп, были получены фундаментальные результаты в теории коммутативных банаховых алгебр, начала развиваться теория бесконечномерных представлений.

Я буду считать, что читатель имеет некоторое представление о локально компактных абелевых группах (мера Хаара, теорема двойственности Понтрягина) и основных понятиях, касающихся банаховых алгебр. Я не буду указывать источники, поскольку речь идет об “общих местах”, однако по ходу дела некоторые факты я все-таки напомним.

⁵Здесь речь идет не о “международном положении”, которое тогда было, пожалуй, как раз “страшно интересным”.

Пусть X – локально компактная абелева группа (записываемая аддитивно). В данном контексте непрерывный гомоморфизм $\chi: X \rightarrow \mathbb{T}$ называется характером группы X . Относительно поточечного умножения характеры сами составляют абелеву группу. Снабженная топологией равномерной сходимости на компактах эта группа называется двойственной и обозначается $\hat{X}$ или $X^\wedge$ (мы для краткости обычно будем писать G вместо $\hat{X}$). Теорема двойственности Понтрягина⁶ устанавливает, что естественное непрерывное отображение $X \rightarrow (X^\wedge)^\wedge$ – топологический изоморфизм.

Формула $\chi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$ устанавливает естественное (в обыденном смысле слова) биективное соответствие между $\hat{\mathbb{R}}$ и $\mathbb{R}$, а формулы $z \rightarrow z^n$ и $n \rightarrow z^n$ – между $\hat{\mathbb{T}}$ и $\mathbb{Z}$ (и $\hat{\mathbb{Z}}$ и $\mathbb{T}$). Основные теоремы об интеграле Фурье на группах были установлены (вслед за построением Понтрягиным теории характеров) Д. А. Райковым и М. Г. Крейном. Меры Хаара на группах X и G можно согласовать так, чтобы в предположении, что обе функции f и $\hat{f}$ непрерывны и суммируемы, соотношения

$$\hat{f}(\chi) = \int_X \chi(x) f(x) dx \quad \text{и} \quad f(x) = \int_G \overline{\chi(x)} \hat{f}(\chi) d\chi$$

стали эквивалентными. Например, при $X = \mathbb{R}$ с этой целью перед знаком интеграла ставят $1/(2\pi)^{1/2}$.

Борелевские меры конечной полной вариации на X с вариацией в качестве нормы и сверткой в качестве умножения составляют комплексную банахову алгебру (с единицей $\mathbb{I}$), которая обозначается $M(X)$. Конус положительных мер обозначается $M^+(X)$. Замкнутый идеал мер, абсолютно непрерывных по мере Хаара, естественно отождествляется с $L^1(X)$. Совпадение $M = L^1$ имеет место тогда и только тогда, когда группа X дискретна.

Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ – (не обязательно непрерывная) комплексная функция на X . Функция f называется *положительно-определенной*, если для каждого конечного набора точек $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$ и набора комплексных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ имеет место неравенство

$$\sum_{p,q=1}^n f(x_p - x_q) \lambda_p \bar{\lambda}_q \geq 0.$$

Класс всех положительно-определенных функций на группе X будем обозначать $\text{PD}(X)$.

Каждый характер принадлежит $\text{PD}(X)$. В частности, это верно для непрерывных характеров. Поэтому $f \in \text{PD}(X)$, если

$$f(x) = \hat{\mu}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_G \chi(x) \mu(d\chi), \quad \text{где} \quad \mu \in M^+(G).$$

Тот факт, что *каждая* непрерывная положительно-определенная функция допускает такое представление, принято называть теоремой Бохнера. Хьюитт и Росс в [11; т. II, §33] указывают, что при $X = \mathbb{Z}$ эту теорему установил

⁶У Понтрягина было оказавшееся несущественным (ван Кампен) дополнительное предположение о счетной базе топологии.

Герглотц в 1911 г. (в связи с работами Каратеодори и Тёплица). В начале 30-х годов Бохнер получил ее для $\mathbb{R}^n$, а общий случай почти одновременно – А. Вейль, Райков и А. Я. Повзнер.

В теореме Бохнера нет ничего мистического. В принципе дело обстоит так. Непрерывная положительно-определенная функция f порождает по формуле

$$\psi(g) = \int_X g(x)f(x) dx$$

непрерывный функционал на $L^1(X)$, который естественно переносится на $(L^1)^\wedge$ и оказывается там положительным: $\psi(\widehat{g}) \geq 0$, если $\widehat{g} \geq 0$, после чего остается применить теорему Рисса (практически так действовали все, причем в одномерном случае (когда $X = \mathbb{R}$), который, как оказывается, мало чем отличается от общего, рассуждение придумал Ф. Рисс).

Заметим, что характеристические функции отличаются от общих непрерывных положительно-определенных функций (на локально компактных абелевых группах) только условием нормировки $f(0) = 1$.

Отметим, что некоторые свойства положительно-определенных функций, например, $|f(x)| \leq f(0)$ или $f(-x) = \overline{f(x)}$, легко следуют из определения, тогда как ряд других удобнее всего выводить из теоремы Бохнера (если заранее ничего не известно относительно непрерывности, группу следует считать дискретной). В частности, так проще всего доказать неравенство М. Г. Крейна:

$$|f(x) - f(y)|^2 \leq 2f(0)\{f(0) - \operatorname{Re} f(x - y)\},$$

из которого, в частности, вытекает, что f равномерно непрерывна, если $\operatorname{Re} f$ непрерывна в точке $x = 0$. Отметим еще, что для $f \in \operatorname{PD}(X)$ непрерывность в нуле вытекает из непрерывности сужения на довольно узкие множества (например, объединение координатных осей на плоскости или гиперповерхность положительной кривизны), и это получается при помощи следующего обобщения неравенства Крейна [12]:

$$\left| f\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) - f\left(\sum_{k=1}^n y_k\right) \right|^2 \leq 2nf(0) \sum_{k=1}^n \{f(0) - \operatorname{Re} f(x_k - y_k)\}.$$

Отметим еще один очевидный, но очень полезный факт. Пусть $L^1(X)$ – совокупность суммируемых по мере Хаара функций на локально компактной абелевой группе с двойственной группой G , и пусть $f \in C(X) \cap L^1(X)$. В таком случае $f \in \operatorname{PD}(X)$ тогда и только тогда, когда имеет место неравенство

$$\widehat{f}(\chi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_G \chi(x)f(x) dx \geq 0 \quad \text{для всех } \chi \in G$$

(интеграл по мере Хаара).

§ 4. Групповые алгебры

Говоря о банаховых алгебрах, мы имеем в виду алгебры A над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Обычно предполагается, что $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ для всех $a, b \in A$.

Если в алгебре есть единица $\mathbb{I}$ по умножению, то дополнительно предполагается, что $\|\mathbb{I}\| = 1$. В банаховой алгебре есть норма, эквивалентная данной и удовлетворяющая этим условиям. Предположение о наличии единицы обычно (но не всегда) не является обременительным, хотя в случае групповых алгебр (о которых пойдет речь) наличие “естественной” единицы влечет за собой дискретность группы.

Для коммутативных банаховых алгебр A с единицей очень важно описание гомоморфизмов $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$, для которых $\varphi(\mathbb{I}) = 1$. Все такие гомоморфизмы непрерывны и, более того, $\|\varphi\| = 1$. В слабой топологии сопряженного пространства они составляют компакт, расположенный на единичной сфере. $\ker(\varphi)$ – максимальный идеал, и других максимальных идеалов нет (И. М. Гельфанд). Поэтому $\text{Spec}_A(a) = \{\varphi(a)\}$.

Такое описание спектра остается полезным и для некоммутативных алгебр B , так как каждый элемент $b \in B$ включается в такую коммутативную банахову подалгебру $A \subset B$ с той же единицей, что $\text{Spec}_B(b) = \text{Spec}_A(b)$.

Если X – локально компактная абелева группа, то $A = L^1(X)$ со сверткой в качестве умножения называется групповой алгеброй группы X . Гельфанд и Райков среди прочего установили, что комплексные гомоморфизмы этой алгебры исчерпываются списком $\varphi(f) = \hat{f}(\chi)$, $\chi \in G$, и что эта алгебра тогда и только тогда обладает единицей по свертке, когда группа X дискретна (и тогда $L^1(X) = M(X)$).

Таким образом, возникает топологическая эквивалентность между максимальными идеалами групповой алгебры $L^1(X)$ и группой характеров G . Эта эквивалентность в конечном счете позволила Д.А. вывести основные факты понтрягинской теории из гельфандовской интерпретации преобразования Фурье на группах. Кроме того, Д.А. получил первые нетривиальные результаты о структуре пространства максимальных идеалов алгебры $M(X)$, в связи с чем он изобрел так называемые системы Райкова, которые в дальнейшем широко применялись в других работах по гармоническому анализу.

Отчасти эти исследования завершил Ю. А. Шрейдер. Исследования Райкова и Шрейдера описаны в [13; гл. 4, 5]. Среди более поздних работ можно отметить работы Ж. Тейлора (см., в частности, [14]), который объяснил наличием аналитической структуры в порциях пространства максимальных идеалов алгебры $M(X)$ эффект Винера–Питта, а также вычислил когомологии такого пространства. Хотя многое прояснилось, алгебра $M(X)$ (в том числе простейшие примеры, скажем, $M(\mathbb{T})$) остается весьма интересным и загадочным объектом.

§ 5. Алгебры с инволюцией

Пусть A – алгебра с единицей $\mathbb{I}$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Инволюцией называется такое отображение $x \rightarrow x^*$ алгебры на себя, что

$$(x^*)^* = x \text{ для всех } x \in A;$$

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^* = \bar{\lambda}_1 x_1^* + \bar{\lambda}_2 x_2^* \text{ для всех } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \text{ и } x_1, x_2 \in A;$$

$$(x_1 x_2)^* = x_2^* x_1^* \text{ для всех } x_1, x_2 \in A.$$

Как отмечается в [13], в контексте банаховых алгебр алгебры с инволюцией впервые появились в работе Гельфанда и Наймарка 1943 г. В случае банаховых алгебр обычно (явно или неявно) накладываются дополнительные условия, связывающие инволюцию и норму. Алгебра называется C^* -алгеброй, если $\|xx^*\| = \|x\|^2$ для всех ее элементов. В упомянутой работе установлено, что коммутативная C^* -алгебра естественно изоморфна алгебре всех непрерывных функций на своем пространстве максимальных идеалов.

Такие теоремы иногда имеют довольно неожиданные следствия. Скажем, из приведенной теоремы Гельфанда–Наймарка вытекает, что алгебра почти периодических функций Бора естественно изоморфна алгебре всех непрерывных функций на связной компактной группе $(\mathbb{R}_d)^\wedge$, где $\mathbb{R}_d$ – вещественная ось в дискретной топологии, и отсюда легко выводится целый ряд фактов о почти периодических функциях Бора.

В дальнейшем Гельфанд и Наймарк установили, что каждая (т.е. не обязательно коммутативная) C^* -алгебра изоморфно реализуется в виде замкнутой самосопряженной подалгебры алгебры ограниченных операторов гильбертова пространства. Однако этому предшествовало исследование более общих алгебр с инволюцией, предпринятое Райковым. Одно из центральных мест в этом исследовании занимали положительные функционалы (для которых, по определению, $\psi(xx^*) \geq 0$). В случае групповых алгебр с естественной инволюцией ($f^*(x) = \overline{f(-x)}$) имеется прямая связь между положительными функционалами и положительно-определенными функциями на группе, которая самим Д.А. использовалась для изучения групп (об этом уже было упомянуто выше).

Поворотным пунктом в развитии теории топологических групп считается работа Гельфанда и Райкова о бесконечномерных унитарных представлениях локально компактных групп. До этого полнота системы неприводимых представлений была установлена лишь для абелевых и компактных групп. Характерно, что в этих случаях неприводимые представления конечномерны. В то же время было известно, что существуют локально компактные группы, не имеющие таких представлений, кроме тривиального. До работы Гельфанда и Райкова полнота системы неприводимых унитарных представлений не была установлена даже для группы Лоренца.

Гельфанд и Райков, используя развитый Райковым аппарат положительно-определенных функций и теорему Крейна–Мильмана о крайних точках, доказали существование полной системы для каждой локально компактной группы. Судить о непосредственных результатах этого прорыва можно, например, по книгам [15] и [16].

§ 6. Дополнительные примеры

В заключение мы приведем несколько примеров, которые связаны с интересами Д.А. в гармоническом анализе. Характерная особенность, объединяющая эти примеры, состоит в том, что положительная определенность в конечном счете играет решающую роль, хотя априори речь о ней вроде бы не идет.

Мы начнем с одного общего определения. Пусть A – банахова алгебра с единицей $\mathbb{I}$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Линейный функционал $\psi: A \rightarrow \mathbb{C}$ называется *состоянием*, если $\|\psi\| = \psi(\mathbb{I}) = 1$. Множество всех состояний будем обозначать $\text{St}(A)$. Легко видеть, что $\text{St}(A)$ – выпуклый компакт в $\sigma(A^*, A)$ -топологии.

Если A есть C^* -алгебра, то линейный (непрерывный) функционал ψ , как мы отмечали, называется положительным, если $\psi(x^*x) \geq 0$ для всех $x \in A$. В случае C^* -алгебры функционал ψ тогда и только тогда является положительным, когда $\|\psi\| = \psi(\mathbb{I})$. Поэтому положительный функционал в такой алгебре тогда и только тогда является состоянием, когда его норма равна 1.

Вернемся к общим банаховым алгебрам. Элемент $a \in A$ называется *эрмитовым*, если

$$\psi(a) \in \mathbb{R} \quad \text{для всех } \psi \in \text{St}(A).$$

В случае C^* -алгебр эрмитовость равносильна самосопряженности ($a^* = a$). Однако как в диск-алгебре, так и в алгебре абсолютно сходящихся рядов Фурье $L^1(\mathbb{Z})$ эрмитовы элементы сводятся к константам.

Элемент $x \in A$ называется *разложимым*, если он допускает представление $x = a + ib$, в котором a и b эрмитовы. Если такое представление существует, то оно единственно. В C^* -алгебре все элементы являются разложимыми.

Детально введенные понятия и история их возникновения обсуждаются в [17]. Там же можно найти доказательство теоремы Пальмера–Видава (T. W. Palmer, I. Vidav), придающей метрический характер теореме Гельфанда–Наймарка: если все элементы банаховой алгебры разложимы, то она является C^* -алгеброй относительно инволюции $a + ib = x \rightarrow x^* = a - ib$. Любопытно, что близкие соображения тесно связаны с исследованием ограниченных симметрических областей в бесконечномерных комплексных банаховых пространствах – сравнительно новым направлением, развивающем исследования Э. Картана (см., в частности, [18]).

При $\sigma > 0$ обозначим через $\mathbf{B}_\sigma$ совокупность всех целых функций экспоненциального типа не выше σ , ограниченных на вещественной оси $\mathbb{R}$. Из теоремы Фрагмена–Линделёфа вытекает, что для таких функций f при всех $\lambda = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$|f(\lambda)| \leq e^{\sigma|\eta|} \cdot \max_{\mathbb{R}} |f(\xi)|.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{B}_\sigma$ – банахово пространство относительно поточечных операций и $\sup$ -нормы по вещественной оси. Из формулы Коши вытекает, что оператор $a = -i d/d\xi$ не выводит из пространства $\mathbf{B}_\sigma$. Легко убедиться, что спектр оператора a в пространстве $\mathbf{B}_\sigma$ совпадает с отрезком $[-\sigma, \sigma]$, в частности, для его спектрального радиуса имеем $|a| = \sigma$.

Знаменитое неравенство С. Н. Бернштейна устанавливает, что

$$\sup_{\mathbb{R}} |f'(\xi)| \leq \sigma \sup_{\mathbb{R}} |f(\xi)| \quad \text{для всех } f \in \mathbf{B}_\sigma,$$

и это означает, что $\|a\| = |a|$. Заметим, что a является эрмитовым элементом алгебры всех ограниченных операторов пространства $\mathbf{B}_\sigma$ и что последнее

равенство сохраняется для всех эрмитовых элементов всех банаховых алгебр. Прямое доказательство этого утверждения (и нескольких близких) имеется в [17].

С другой стороны, имеются многочисленные (в том числе многомерные) обобщения указанного неравенства Бернштейна. Классический подход к таким неравенствам в рамках теории целых функций, а также их приложения к обратным задачам теории приближений отражен в [19], [20].

Оказывается, в рамках абстрактного гармонического анализа часть из этих неравенств превращается в тривиальные [21]. Хотя результатам можно придать смысл в произвольных локально компактных абелевых группах, мы ограничимся здесь евклидовыми пространствами.

Пусть Q – компакт в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathbf{B}(Q)$ совокупность всех таких непрерывных и ограниченных функций на (двойственном экземпляре) $\mathbb{R}^n$, преобразование Фурье которых (понимаемое в смысле теории распределений Шварца) сосредоточено на Q . Относительно поточечных операций и $\sup$ -нормы по $\mathbb{R}^n$ множество $\mathbf{B}(Q)$ составляет банахово пространство. При $Q = [-\sigma, \sigma]$ получается $\mathbf{B}_\sigma$.

Если $f \in \mathbf{B}(Q)$ и $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$, то $T_\mu f \in \mathbf{B}(Q)$, где $T_\mu f = f * \mu$ и

$$(f * \mu)(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi - \eta) \mu(d\eta).$$

Кроме того, $T_\mu = 0$, если $\hat{\mu}(\chi) = 0$ в некоторой окрестности компакта Q . Имея это в виду, можно естественно расширить алгебру операторов $\{T_\mu\}$ до алгебры $\{T_q\}$, где $\{q\}$ – совокупность всех функций, локально совпадающих с функциями вида $\hat{\mu}$, $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$. Легко убедиться, что

$$\text{Spec}(T_q) = \{q(\chi) \mid \chi \in Q\}$$

и что $\|T_q\| = \inf(\text{var}(\nu))$, где нижняя грань берется по всем таким мерам ν , для которых $\hat{\nu}(\chi) = q(\chi)$ в некоторой окрестности компакта Q .

Теперь легко дать условия, по отдельности необходимые или достаточные для того, чтобы в $\mathbf{B}(Q)$ выполнялось равенство $\|T_q\| = |T_q|$. Для упрощения формулировок будем считать, что $0 \in Q$ и $1 = q(0) \geq |q(\chi)|$ при всех $\chi \in Q$. Конечно, в таком случае $|T_q| = 1$.

Необходимость: если $\|T_q\| = 1$, то сужение $q|_Q$ продолжается в $\mathbb{R}^n$ до функции из $\text{PD}(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что такое продолжение, вообще говоря, не единственно и среди таких продолжений *не обязательно* есть непрерывное.

Достаточность: $\|T_q\| = 1$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая мера $\nu \in M(\mathbb{R}^n)$, что $\hat{\nu}(x) = q(x)$ в некоторой окрестности компакта Q и $\text{var}(\nu) < 1 + \varepsilon$.

Есть такие классы компактов Q , что указанные условия смыкаются (отрезок на оси – один из простейших примеров).

Будем говорить, что компакт Q удовлетворяет условию (S) , если Q является множеством спектрального синтеза. Это означает, что если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ и $\hat{f}|_Q = 0$, то для подходящей функции $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ выполняются условия: $\|f - g\| < \varepsilon$ и $\hat{g}(x) = 0$ в некоторой окрестности компакта Q . Л. Шварц в 1948 г. показал, что единичная сфера S^2 в $\mathbb{R}^3$ *не является* множеством спектрального синтеза.

Будем говорить, что компакт Q удовлетворяет условию (C) в точке $x_0 \in Q$, если существует такое натуральное m , что для каждой окрестности V точки x_0 множество

$$\{\pm x_1, \pm x_2, \dots, \pm x_m \mid x_1, x_2, \dots, x_m \in Q \cap V\}$$

содержит некоторую окрестность точки 0. Например, отрезок $[-\sigma, \sigma]$ на оси $\mathbb{R}$ и сфера положительного радиуса в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$ удовлетворяют условию (C) в каждой своей точке.

Имеет место следующий критерий. Предположим, что компакт Q удовлетворяет условию (S) и условию (C) в точке 0. В этом случае $\|T_q\| = 1$ тогда и только тогда, когда $q|Q$ продолжается в $\mathbb{R}^n$ до непрерывной функции из $\text{PD}(\mathbb{R}^n)$.

Среди прочего это позволяет обосновать пример Шварца. Действительно, пусть $Q = S^2 \subset \mathbb{R}^3$. В пространстве $\mathbf{B}(S^2)$ рассмотрим оператор Лапласа

$$\Delta = \partial^2/\partial t_1^2 + \partial^2/\partial t_2^2 + \partial^2/\partial t_3^2.$$

Хорошо известно, что функция $\cos \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}$ принадлежит пространству $\mathbf{B}(S^2)$. Поэтому $\|\Delta\| = 3$, тогда как $\text{Spec}(\Delta) = \{1\}$.

Теперь мы обсудим неравенство фон Неймана. Отметим, что наше рассуждение близко к тому, которое приводят Секефальви-Надь и Фояш [22; гл. 1, § 8], но мы иначе расставляем акценты.

Классическое неравенство фон Неймана состоит в следующем. Пусть T – ограниченный оператор гильбертова пространства, причем $\|T\| < 1$, и пусть f – такой полином, что $|f(\lambda)| < 1$ при $|\lambda| < 1$. Тогда $\|f(T)\| < 1$. В соответствии с теоремой Гельфанда–Наймарка оператор можно заменить таким элементом a из C^* -алгебры A , для которого $\|a\| < 1$, и утверждение будет состоять в том, что $\|f(a)\| < 1$, и мы будем заниматься неравенством фон Неймана именно в этом варианте.

В случае C^* -алгебры A мы пишем $x \geq 0$, если $x^* = x$ и $\text{Spec}(x) \subset \{\lambda \mid \lambda \geq 0\}$. Легко проверить, что $x \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\psi(x) \geq 0$ для всех $\psi \in \text{St}(A)$.

Теперь мы перейдем непосредственно к неравенству фон Неймана. Легко показать, что общий случай сводится к случаю, когда $|a| < 1$, где $|a|$ – спектральный радиус элемента a , и мы будем считать, что это условие выполнено. Отметим, что тогда $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} < 1$ и то же верно при замене a на a^* .

При данном a и данном $\psi \in \text{St}(A)$ сформируем последовательность $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha_n, n \in \mathbb{Z}\}$ по следующему правилу: $\alpha_0 = 1$, а при целых $n \neq 0$ положим $\alpha_n = \psi(a^n)$, если $n > 0$, и $\alpha_n = \overline{\alpha_{-n}}$, если $n < 0$. Основное замечание состоит в том, что

$$\|a\| \leq 1 \text{ тогда и только тогда, когда } \alpha \in \text{PD}(\mathbb{Z})$$

(при каждом выборе $\psi \in \text{St}(A)$).

Действительно, условие, касающееся α , равносильно тому, что $\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \lambda^n \geq 0$, если $|\lambda| = 1$. Так как это должно иметь место при всех $\psi \in \text{St}(A)$, то получается, что должно выполняться неравенство

$$b \stackrel{\text{def}}{=} -\mathbb{I} + (\mathbb{I} - \lambda a)^{-1} + (\mathbb{I} - \bar{\lambda} a^*)^{-1} \geq 0$$

(и обратно). Если c – обратимый элемент алгебры A , то неравенство $b \geq 0$ равносильно неравенству $cbc^* \geq 0$. Если взять $c = \mathbb{I} - \lambda a$, то после очевидных сокращений получится, что исходное условие, касающееся α , равносильно условию $\mathbb{I} - aa^* \geq 0$.

Пусть теперь $\|a\| < 1$ и f – такой полином, что $|f(\lambda)| \leq 1$ при $|\lambda| \leq 1$. Пусть $b = f(a)$ и $\psi \in \text{St}(A)$. Обозначим через $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ последовательности, отвечающие в указанном выше смысле элементам a и b соответственно.

По теореме Герглотца, существует такая вероятностная борелевская мера μ на единичной окружности $\mathbb{T}$, что

$$\alpha_n = \int_{\mathbb{T}} \lambda^n \mu(d\lambda), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда следует, что при целых $k > 0$

$$\beta_k = \int_{\mathbb{T}} f(\lambda)^k \mu(d\lambda).$$

Так как $|f(\lambda)| \leq 1$, то отсюда легко следует, что $\{\beta_n\} \in \text{PD}(\mathbb{Z})$.

В заключение мы опишем, как (среди прочего) установить, что $\zeta(1+it) \neq 0$, используя только общие соображения, связанные с положительной определенностью (и эйлерово произведение)⁷.

Предварительное замечание состоит в следующем. Пусть X – локально компактная абелева группа и f – вещественная непрерывная положительно-определенная функция на X . Обозначим через f_+ функцию, совпадающую с f там, где $f(x) \geq 0$, и равную 0 при всех остальных $x \in X$. Пусть $f_- = f - f_+$ (так что $f_- \geq 0$). Замечание состоит в том, что если $f_+ \in L^1(X)$, то и $f_- \in L^1(X)$, причем

$$\int_X f_-(x) dx \leq \int_X f_+(x) dx$$

(интеграл по мере Хаара). Если $f \in L^1(X)$, то функция $\hat{f}$ на G неотрицательна, непрерывна и суммируема, и формула для преобразований Фурье дает

$$0 \leq \hat{f}(0) = \int_X f(x) dx = \int_X f_+(x) dx - \int_X f_-(x) dx.$$

В общем случае сначала “приглушается” рост f , а затем применяется какая-нибудь теорема о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

Если $\sigma = \text{Re } s > 1$, то, используя эйлерово произведение, получаем

$$\log \zeta(s) = \sum_{k,p} \frac{1}{kp^s}.$$

Суммирование производится по всем натуральным k и простым p . Из этого представления получается, что $g_\sigma \in \text{PD}(\mathbb{R})$, где

$$g_\sigma(t) = \log |\zeta(\sigma + it)|.$$

⁷В краткой форме я несколько раз рассказывал об этом. Подробное изложение см. в статье “Asymptotic law for the distribution of prime numbers in the context of free Abelian semigroups”, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:1 (2006), 31–54.

Пусть

$$f(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 1} g_{\sigma}(t)/g_{\sigma}(0).$$

Легко видеть, что предел существует при всех $t \in \mathbb{R}$, причем $f(0) = 1$, $f(t) = k$, если ζ -функция имеет нуль порядка k в точке $1 + it$, и $f(t) = 0$ при всех остальных $t \in \mathbb{R}$. В качестве поточечного предела функция f остается в $PD(\mathbb{R})$, хотя и теряет непрерывность. Рассматривая $\mathbb{R}$ в дискретной топологии, мы можем применить к f сформулированное выше предложение. Так как f – четная функция, то получается, что $\zeta(1 + it) \neq 0$.

Это рассуждение дословно распространяется на произведение классических L -функций Дирихле. Ввиду его полной прозрачности, оно приводит и к дальнейшим обобщениям как PNT, так и теоремы Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях. В частности, в сочетании с тауберовыми теоремами подобное рассуждение позволяет придать гораздо более законченный вид теоремам Б. М. Бредихина о базисных элементах свободных абелевых полугрупп (для полугрупп, удаленных от натурального ряда, у ζ -функции может появиться конечное семейство нулей на прямой $\sigma = 1$ и тогда в “асимптотическом законе” вместо константы возникает тригонометрический полином).

Список литературы

- [1] *Математика в СССР за сорок лет: 1917–1957*, т. I, II, Физматгиз, М., Л., 1959.
- [2] *Юбилейный сборник к 70-летию кафедры математического анализа МПГУ*, МПГУ, М., 2004.
- [3] *Математика в СССР за тридцать лет: 1917–1947*, Гостехиздат, М., Л., 1948.
- [4] *Математика в СССР 1958–1967*, т. II, вып. 2, Наука, М., Л., 1970.
- [5] Ю. В. Линник, И. В. Островский, *Разложение случайных величин и векторов*, Наука, М., 1972.
- [6] Л. З. Лившиц, И. В. Островский, Г. П. Чистяков, “Арифметика вероятностных законов”, *Итоги науки и техники. Теория вероятн. Матем. статист. Теорет. кибернет.*, **12**, ВИНТИ, М., 1975, 5–42.
- [7] Е. Лукач, *Характеристические функции*, Наука, М., 1979; E. Lukacs, *Characteristic functions*, Griffin, London, 1970.
- [8] Г. М. Фельдман, *Арифметика вероятностных распределений и характеристизационные задачи на абелевых группах*, Наукова думка, Киев, 1990.
- [9] J. Korevaar, “A century of complex Tauberian theory”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **39**:4 (2002), 475–531.
- [10] Ю. А. Брудный, “О локальном наилучшем приближении функций многочленами”, *Докл. АН СССР*, **161**:4 (1965), 746–749.
- [11] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*. Т. II: *Структура и анализ компактных групп*. Анализ на локально компактных абелевых группах, Мир, М., 1975; *Abstract harmonic analysis*. V. II: *Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups*, Grundlehren Math. Wiss., **152**, Springer-Verlag, New York, 1970.
- [12] E. A. Gorin, “Universal symbols on locally compact abelian groups”, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, **51**:2 (2003), 199–204.
- [13] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, *Коммутативные нормированные кольца*, Физматгиз, М., 1960.

- [14] J. L. Taylor, “The cohomology of the spectrum of a measure algebra”, *Acta Math.*, **126**:1 (1971), 195–225.
- [15] М. А. Наймарк, *Нормированные кольца*, Наука, М., 1968.
- [16] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1978.
- [17] F. F. Bonsall, J. Duncan, *Complete normed algebras*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **80**, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [18] W. Kaup, “A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces”, *Math. Z.*, **183**:4 (1983), 503–529.
- [19] Н. И. Ахиезер, *Избранные труды по теории функций и математической физике*, т. I, II, АКТА, Харьков, 2001.
- [20] B. Ya. Levin, *Lectures on entire functions*, Transl. Math. Monogr., **150**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [21] Е. А. Горин, “Неравенства Бернштейна с точки зрения теории операторов”, *Вестн. Харьк. ун-та. Сер. прикл. матем. и мех.*, **205**:45 (1980), 77–105; Е. А. Gorin, “Bernstein’s inequality from the point of view of operator theory”, *Selecta Math. Sov.*, **7**:3 (1988), 191–219.
- [22] Б. Секефальди-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1970; B. Sz.-Nagy, C. Foias, *Analyse harmonique des opérateurs de l’espace de Hilbert*, Masson, Paris, 1967.

Е. А. Горин (Е. А. Gorin)

Московский педагогический государственный университет

E-mail: evgeny.gorin@mtu-net.ru

Поступила в редакцию

17.01.2006