Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Брезис, Как распознать постоянные функции. Связь с пространствами Соболева, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 59–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm533>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:59:12

УДК 517.98

Посвящается М. И. Вишику с выражением почтения и дружбы

КАК РАСПОЗНАТЬ ПОСТОЯННЫЕ ФУНКЦИИ.
СВЯЗЬ С ПРОСТРАНСТВАМИ СОБОЛЕВА

Х. БРЕЗИС

Дается критерий принадлежности функции $f \in L^p$ пространству $W^{1,p}$ ($p > 1$) и пространству BV ($p = 1$). Обсуждаются различные интегральные условия, при выполнении которых измеримая функция является константой.

Библиография: 17 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	59
§ 2. Новая характеристика соболевских пространств	63
§ 3. Возвращение к постоянным функциям	71
§ 4. Другой подход. Связь с VMO	72
Список литературы	73

§ 1. Введение

Большинство идей в этой статье происходят из цикла совместных работ автора с Ж. Бургэном, Я. Ли, П. Миронеску и Л. Ниренбергом (см. [4]–[7], [10], [11]). Тем не менее мы представим немного другое изложение, в частности, упрощая некоторые доказательства.

Мы начнем со следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Ω – связное открытое множество в $\mathbb{R}^N$, и пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая функция такая, что

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{N+1}} dx dy < \infty. \quad (1)$$

Тогда f является константой.

Исходной мотивацией для подобного утверждения были следующие два направления.

(i) *Единственность поднятия.* Для данной (измеримой) функции $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $|u| = 1$ почти всюду, существует много поднятий φ , т.е. $u = e^{i\varphi}$. Если φ_1, φ_2 – два поднятия, то

$$k(x) = \frac{1}{2\pi}(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)): \Omega \rightarrow \mathbb{Z}.$$

При дополнительных предположениях иногда удается доказать, что k является *постоянной* функцией. Например, если φ_1, φ_2 – непрерывны и Ω – связна, то k – постоянная функция. Мы хотим сказать, что на самом деле условие непрерывности может быть ослаблено до некоторого условия другого типа, такого как (1), которое намного более естественно при работе с соболевскими пространствами (см. замечание 3).

(ii) *Теория степени для классов разрывных отображений.* Возможность определения степени для отображений, принадлежащих пространствам Соболева (см. [9], [11]), основывается на факте, что $\deg h_t(\cdot)$ не изменяется при гомотопии $h_t(\cdot)$, когда t пробегает $[0, 1]$ (или, в общем случае, связное параметрическое пространство Λ). Подобные заключения могут быть возможны в ситуациях, когда зависимость от t не обязана быть непрерывной.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предложение 1 легко формулируется, однако мы не знаем прямого, элементарного доказательства. Наше доказательство не очень сложно, но требует использования теории соболевских пространств.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие связности является, очевидно, существенным. Утверждение предложения 1 остается справедливым, если $N + 1$ в неравенстве (1) заменить на любое $q \geq N + 1$. В самом деле, достаточно доказать предложение 1 в случае, когда область Ω является шаром B (общий случай следует в силу связности); тогда

$$\frac{1}{|x - y|^{N+1}} \leq \frac{C}{|x - y|^q} \quad \forall x, y \in B.$$

(Утверждение, тем не менее, остается верным в некоторых несвязных областях, например в $\Omega = G \setminus \Sigma$, где G – связно, а Σ – замкнутое множество нулевой меры. Возникает интересная задача – изучить, в каких несвязных областях справедливо утверждение предложения 1.)

С другой стороны, если $N + 1$ в (1) заменить на $q < N + 1$, то утверждение перестанет быть верным. Действительно, для *любой* липшицевой функции на B выполнено:

$$\int_B \int_B \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^q} dx dy \leq C \int_B \int_B \frac{dx dy}{|x - y|^{q-1}} < \infty,$$

поскольку $q < N + 1$.

Из предложения 1 можно вывести множество разнообразных следствий. Мы приведем несколько из них.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Ω – связное открытое множество в $\mathbb{R}^N$ и $f: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ – измеримая функция такая, что

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{N+1}} dx dy < \infty \quad (2)$$

при некотором $1 \leq p < \infty$. Тогда f является постоянной функцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что

$$|f(x) - f(y)|^p \geq |f(x) - f(y)|,$$

поскольку $f(x) - f(y) \in \mathbb{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $p > 1$ условие (2) говорит, что f лежит в пространстве Соболева (с дробными производными) $W^{s,p}$ с $s = 1/p$ (см., например, [1]). Поэтому мы можем утверждать, что при условии $sp \geq 1$ любая функция, лежащая в $W^{s,p}(\Omega; \mathbb{Z})$, является константой. Заметим, что условие $sp \geq 1$ *значительно слабее*, чем условие $sp > N$, которое влечет (по теореме вложения Соболева), что f – непрерывна. Следствие 1 при $p = 2$ и $s = 1/2$ можно найти в [15; лемма 1.1] (авторы этой работы приписывают его Винеру в случае $N = 2$). В [3] получено подобное утверждение при более сильном предположении $sp > 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Предположим, что Ω – связное открытое множество в $\mathbb{R}^N$ и A – произвольное измеримое подмножество такое, что*

$$\int_A \int_{c_A} \frac{dx dy}{|x - y|^{N+1}} < \infty. \quad (3)$$

Тогда либо множество A , либо множество $(\Omega \setminus A)$ имеет меру нуль.

Для доказательства достаточно применить предложение 1 с $f = \chi_A$ – характеристической функцией множества A . Заметим, что показатель $N + 1$ в (3) опять оптимален. Действительно, пусть A – произвольное подмножество Ω с гладкой границей, тогда неравенство (3) выполняется, если $N + 1$ заменить на любое $q < N + 1$ (достаточно рассмотреть случай, когда граница ∂A – плоская, и сделать прямое вычисление).

Сформулируем ряд обобщений предложения 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть Ω – связное открытое множество в $\mathbb{R}^N$ и $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая функция такая, что*

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{N+p}} dx dy < \infty \quad (4)$$

для некоторого $1 \leq p < \infty$. Тогда f – константа.

(Предложение 1 соответствует случаю $p = 1$.)

Следующим обобщением является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть Ω – связное открытое множество в $\mathbb{R}^N$ и $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая функция такая, что*

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^p} \psi(|x - y|) dx dy < \infty, \quad (5)$$

где $p \geq 1$ и функция $\psi \in L^1_{\text{loc}}(0, \infty)$, $\psi \geq 0$, удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \psi(r) r^{N-1} dr = \infty. \quad (6)$$

Тогда f – константа.

(Предложение 2 соответствует случаю $\psi(r) = r^{-N}$.)

Приведем одно важное обобщение предложения 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть Ω – связное открытое множество в $\mathbb{R}^N$ и $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая функция такая, что

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{N+p-\varepsilon}} dx dy = o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (7)$$

т. е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{N+p-\varepsilon}} dx dy = 0 \quad (7')$$

для некоторого $p \geq 1$. Тогда f – константа.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае, когда Ω ограничено, условие (7), очевидно, намного слабее, чем условие (4), которое означает, что

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{N+p-\varepsilon}} dx dy = O(1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

С другой стороны, условие (7) оптимально, так как для любой липшицевой функции f на Ω

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{N+p-\varepsilon}} dx dy = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (8)$$

поскольку

$$\int_0^1 \frac{1}{r^{N-\varepsilon}} r^{N-1} dr = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Сформулируем итоговое обобщение, которое вплотную подводит нас к связи с соболевскими пространствами.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Ω – связное открытое множество в $\mathbb{R}^N$ и $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая функция. Пусть $(\rho_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ – последовательность функций такая, что

$$\rho_{\varepsilon} \in L^1_{\text{loc}}(0, \infty), \quad \rho_{\varepsilon} \geq 0, \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \rho_{\varepsilon}(r) r^{N-1} dr = 1 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (10)$$

$$\text{для каждого } \delta > 0 \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\infty} \rho_{\varepsilon}(r) r^{N-1} dr = 0. \quad (11)$$

Предположим, что для некоторого $p \geq 1$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^p} \rho_{\varepsilon}(|x - y|) dx dy = 0. \quad (12)$$

Тогда f – константа.

Заметим, что предложение 4 является следствием теоремы 1, если выбрать

$$\rho_{\varepsilon}(r) = \begin{cases} \varepsilon r^{-N+\varepsilon}, & r < 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

Предложение 3 также является следствием теоремы 1 при выборе

$$\rho_\varepsilon(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < \varepsilon, \\ a_\varepsilon \psi(r) & \text{при } \varepsilon < r < 1, \\ 0 & \text{при } r > 1, \end{cases}$$

где

$$a_\varepsilon = \left(\int_\varepsilon^1 \psi(r) r^{N-1} dr \right)^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (13)$$

Заметим, что ввиду (5) и (13)

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^p} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy \leq C a_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Чтобы доказать теорему 1, мы должны сделать небольшое отступление в теорию соболевских пространств.

§2. Новая характеристика соболевских пространств

Для простоты мы начнем со случая всего $\mathbb{R}^N$. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < \infty$. Хорошо известно (см., например, [8; предложение IX.3]), что если $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, то

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq |h|^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^p dx \quad \text{для каждого } h \in \mathbb{R}^N. \quad (14)$$

Обратно, если $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ и существует такая константа C , что

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq C |h|^p \quad \text{при } h \rightarrow 0, \quad (15)$$

то $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

При $p = 1$ надо заменить $W^{1,1}$ на BV – пространство функций из L^1 , производные которых (в смысле теории распределений) – ограниченные меры Радона. Таким образом, $f \in BV$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)| dx \leq C |h| \quad \text{при } |h| \rightarrow 0, \quad (16)$$

и в этом случае неравенство (16) справедливо при всех $h \in \mathbb{R}^N$ с константой $C = \int |\nabla f| dx$. В частности, если ρ_ε удовлетворяет (9), (10) и $f \in W^{1,p}$, мы получаем

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(|h|) dh \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x+h) - f(x)|^p}{|h|^p} dx \leq C \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (17)$$

так как

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(|h|) dh = \sigma_N \int_0^\infty \rho_\varepsilon(r) r^{N-1} dr = \sigma_N,$$

где $\sigma_N = |S^{N-1}|$.

Сделав замену переменных в (17), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^p} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy \leq C \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (18)$$

Аналогично, если $f \in BV$, то

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy \leq C \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (19)$$

Важным моментом является то, что условие (18) (соответственно (19)), на самом деле, характеризует принадлежность пространству $W^{1,p}$ при $p > 1$ (соответственно BV).

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p > 1$, и удовлетворяет (18). Пусть семейство функций (ρ_ε) удовлетворяет условиям (9)–(11). Тогда $f \in W^{1,p}$ и*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^p} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy = K_{p,N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^p dx, \quad (20)$$

где $K_{p,N}$ зависит лишь от p и N .

Аналогично, при $p = 1$ имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ удовлетворяет (19). Пусть семейство функций (ρ_ε) удовлетворяет условиям (9)–(11). Тогда $f \in BV$ и*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy = K_{1,N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f| dx, \quad (21)$$

где интеграл в правой части обозначает полную вариацию меры ∇f .

У теоремы 3 имеется интересное

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть A – ограниченное измеримое множество в $\mathbb{R}^N$. Тогда A имеет ограниченный периметр (в смысле де Джиорджи) тогда и только тогда, когда*

$$\int_A \int_{c_A} \frac{1}{|x - y|} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy \leq C \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

и в этом случае

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A \int_{c_A} \frac{1}{|x - y|} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy = K_{1,N} \text{Per}(A). \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Первоначальное доказательство теоремы 2 может быть найдено в [6]. Здесь мы изложим более простое, сообщенное нам И. Стейном. Предположим, что функция $f \in L^p$ удовлетворяет (18). Рассмотрим последовательность гладких приближений

$$f_\delta = \gamma_\delta \star f,$$

где (γ_δ) – гладкая аппроксимативная единица. Заметим, что (18) останется справедливым, если функцию f заменить на любой ее сдвиг $(\tau_h f)(x) = f(x + h)$. Кроме того, неравенство (18) выдерживает операцию взятия выпуклой оболочки. Следовательно, f_δ удовлетворяет (18) с той же константой C . Таким образом, справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f_\delta(x) - f_\delta(y)|^p}{|x - y|^p} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy \leq C, \quad (23)$$

где C – не зависит от ε и δ .

Далее воспользуемся следующим утверждением. Пусть функция $g \in C^2(\mathbb{R}^N)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|g(x) - g(y)|^p}{|x - y|^p} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy \leq C \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (24)$$

где последовательность ρ_ε удовлетворяет (9)–(11). Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla g(x)|^p dx \leq \frac{C}{K_{p,N}}, \quad (25)$$

где C берется из (24) и

$$K_{p,N} = \int_{S^{N-1}} |(\sigma \cdot e)|^p d\sigma, \quad e \in S^{N-1}. \quad (26)$$

Доказательство неравенства (25). Возьмем произвольный компакт K в $\mathbb{R}^N$. Для всех $x \in K$ и $|h| \leq 1$ имеем

$$|g(x + h) - g(x) - h \cdot \nabla g(x)| \leq C_K |h|^2. \quad (27)$$

Из неравенства (24) имеем

$$\int_K dx \int_{|h| \leq 1} \frac{|g(x + h) - g(x)|^p}{|h|^p} \rho_\varepsilon(|h|) dh \leq C. \quad (28)$$

Из (27) получаем

$$|h \cdot \nabla g(x)| \leq |g(x + h) - g(x)| + C_K |h|^2,$$

и, следовательно, для каждого $\theta > 0$

$$|h \cdot \nabla g(x)|^p \leq (1 + \theta) |g(x + h) - g(x)|^p + C_{\theta,K} |h|^{2p}.$$

Используя (28), получаем:

$$\int_K dx \int_{|h| \leq 1} \frac{|(h \cdot \nabla g(x))|^p}{|h|^p} \rho_\varepsilon(|h|) dh \leq (1 + \theta)C + C_{\theta, K} |K| \int_{|h| \leq 1} |h|^p \rho_\varepsilon(|h|) dh. \quad (29)$$

Заметим, что для каждого вектора $V \in \mathbb{R}^N$ справедливо равенство

$$\int_{|h| \leq 1} \frac{|(h \cdot V)|^p}{|h|^p} \rho_\varepsilon(|h|) dh = K_{p, N} |V|^p \int_0^1 \rho_\varepsilon(r) r^{N-1} dr.$$

Также заметим, что условия (10) и (11) влекут

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|h| \leq 1} |h|^p \rho_\varepsilon(|h|) dh = 0.$$

Переходя в неравенстве (29) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, мы получаем

$$K_{p, N} \int_K |\nabla g(x)|^p dx \leq (1 + \theta)C. \quad (30)$$

Поскольку (30) выполняется для каждого $\theta > 0$ и для каждого компакта K (с независимой от θ и K константой C), мы получаем (25) и, как следствие,

$$K_{p, N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla g(x)|^p dx \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|g(x) - g(y)|^p}{|x - y|^p} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy. \quad (31)$$

С другой стороны, если $g \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$, то

$$|g(x + h) - g(x)| \leq |h \cdot \nabla g(x)| + C'|h|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \forall h \in \mathbb{R}^N.$$

Следовательно,

$$|g(x + h) - g(x)|^p \leq (1 + \theta)|h \cdot \nabla g(x)|^p + C'_\theta |h|^{2p}.$$

Умножив на $\rho_\varepsilon(|h|)/|h|^p$ и проинтегрировав по множеству $\{(x, h) \in \mathbb{R}^{2N} : x \text{ или } x + h \in \text{supp } g\}$, получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|g(x + h) - g(x)|^p}{|h|^p} \rho_\varepsilon(|h|) dh \\ & \leq (1 + \theta) \int_{\mathbb{R}^N} K_{p, N} |\nabla g(x)|^p dx + 2C'_\theta |\text{supp } g| \int_{\mathbb{R}^N} |h|^p \rho_\varepsilon(|h|) dh. \end{aligned}$$

Переходя к пределу сначала при $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем при $\theta \rightarrow 0$, получаем

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|g(x + h) - g(x)|^p}{|h|^p} \rho_\varepsilon(|h|) dh \leq \int_{\mathbb{R}^N} K_{p, N} |\nabla g(x)|^p dx. \quad (32)$$

Из (31) и (32) следует, что для любой функции $g \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|g(x) - g(y)|^p}{|x - y|^p} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy = K_{p, N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla g|^p dx.$$

Поскольку $C_0^2(\mathbb{R}^N)$ плотно в $W^{1, p}(\mathbb{R}^N)$, то отсюда нетрудно получить (используя (14)), что (20) выполняется для каждой функции $f \in W^{1, p}(\mathbb{R}^N)$.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 2. Предполагая, что $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ удовлетворяет (18), и применяя неравенство (25) к $g = f_\delta$, мы получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f_\delta|^p dx \leq \frac{C}{K_{p, N}}, \quad (33)$$

где C – константа неравенства (18). Переходя к пределу в неравенстве (33) при $\delta \rightarrow 0$, мы получаем, что $f \in W^{1, p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ удовлетворяет условию (19). Повторяя доказательство предыдущей теоремы, мы получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f_\delta| dx \leq \frac{C}{K_{1,N}}.$$

Поэтому $f \in BV$ и

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f| dx \leq \frac{C}{K_{1,N}}.$$

Иными словами, мы доказали, что

$$K_{1,N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f| dx \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy. \quad (34)$$

С другой стороны, используя (16), легко заключить, что для каждой функции $f \in BV$ выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy \leq \tilde{K}_N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f| dx. \quad (35)$$

К сожалению, константа $\tilde{K}_N$ в (35) не совпадает с $K_{1,N}$. Соотношение (21), очевидно, выполняется для функций $f \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$. Однако из этого мы не можем сразу заключить, что оно выполняется для каждой функции $f \in BV$, поскольку пространство $C_0^2(\mathbb{R}^N)$ не плотно в BV .

Остается доказать, что для каждой функции $f \in BV(\mathbb{R}^N)$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy \leq K_{1,N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f| dx.$$

Это неравенство доказано в [12] с использованием некоторых новых идей, которые мы не будем здесь воспроизводить.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Утверждения, подобные теоремам 2 и 3, справедливы если $\mathbb{R}^N$ заменить на *гладкую* ограниченную область Ω в $\mathbb{R}^N$. Однако они *не верны* для произвольных ограниченных областей Ω в случае, если $\partial\Omega$ — *не гладкая*. Тем не менее, для произвольных областей Ω справедливо неравенство

$$K_{p,N} \int_{\Omega} |\nabla f|^p dx \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^p} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy. \quad (36)$$

Однако при $p > 1$ может случиться так, что $f \in W^{1,p}(\Omega)$ (т.е. левая часть в (36) — *конечна*), тогда как правая часть в (36) — *бесконечна*. Приведем пример. Пусть $\Omega = D \setminus \Sigma$, где D — диск (в $\mathbb{R}^2$) и Σ — разрез. Пусть f — гладкая функция в Ω , которая разрывна на разрезе (например, две разные константы на разных сторонах разреза). Ясно, что $f \in W^{1,p}(\Omega)$, но правая часть в (36) — бесконечна. Это следует из того, что

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \dots = \int_D \int_D \dots$$

и если бы правая часть в (36) была конечна, то мы могли бы заключить, что $f \in W^{1,p}(D)$ (по теореме 2), что, очевидно, не так. Этот пример наводит на следующий открытый вопрос.

ОТКРЫТАЯ ЗАДАЧА 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченное связное множество (не обязательно гладкое). Пусть $\delta(x, y)$ обозначает *геодезическое расстояние* в Ω . Пусть $f \in L^p(\Omega)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{\delta(x, y)^p} \rho_{\varepsilon}(\delta(x, y)) dx dy \leq C \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Следует ли из этого, что $f \in W^{1,p}$, и если да, то верно ли, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{\delta(x, y)^p} \rho_{\varepsilon}(\delta(x, y)) dx dy = K_{p,N} \int_{\Omega} |\nabla f|^p dx?$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Характеризация пространства $W^{1,p}$ (соответственно BV), данная теоремой 2 (соответственно 3), мотивирует следующее определение соболевских пространств для отображений $f: M \rightarrow \tilde{M}$ метрических пространств, где M – снабжено мерой μ :

$$\iint \frac{\tilde{d}(f(x), f(y))^p}{d(x, y)^p} \rho_{\varepsilon}(d(x, y)) d\mu(x) d\mu(y) \leq C \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Заметим, что в условиях (10) и (11) участвует размерность N , но вместо нее можно рассмотреть $\lim_{r \rightarrow 0} |\log \mu(B_r(x))| / |\log r|$. Было бы интересно изучить свойства таких отображений (теоремы вложения Соболева и т.п.) и сравнить это определение с другими (см. [16], [14], [2], а также библиографию в этих работах).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Справедливы аналоги теорем 2 и 3, когда Ω – *гладкая* ограниченная область в $\mathbb{R}^N$. Например, справедлива

ТЕОРЕМА 2'. Пусть $f \in L^p(\Omega)$ удовлетворяет

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^p} \rho_{\varepsilon}(|x - y|) dx dy \leq C \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (37)$$

где для последовательности ρ_{ε} выполнены условия (9)–(11). Тогда $f \in W^{1,p}(\Omega)$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^p} \rho_{\varepsilon}(|x - y|) dx dy = K_{p,N} \int_{\Omega} |\nabla f|^p dx. \quad (38)$$

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Допустим, что выполнено (37). Используя стандартную технику отражения относительно границы и домножения на срезающую функцию, можно построить функцию $\tilde{f}$ на $\mathbb{R}^N$ с компактным носителем такую, что $\tilde{f} = f$ на Ω и

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|^p}{|x - y|^p} \rho_{\varepsilon}(|x - y|) dx dy \leq C' \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (39)$$

По теореме 2 мы получаем, что $\tilde{f} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ и, следовательно, $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

Далее мы показываем, что для $f \in C^2(\overline{\Omega})$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^p} \rho_{\varepsilon}(|x - y|) dx dy \leq C(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla f|^p dx. \quad (40)$$

После этого неравенство (38) следует для $f \in C^2(\overline{\Omega})$. Заключение теоремы 2' получается из соображений плотности.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Некоторые конкретные выборы последовательности ρ_ε представляют особый интерес. Приведем несколько из них.

А) Выбор 1:

$$\rho_\varepsilon(r) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{r^{N-\varepsilon}}, & 0 < r < 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

Такой выбор влечет

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть Ω – гладкая открытая область в $\mathbb{R}^N$. Пусть функция $f \in L^p(\Omega)$ удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{N+p-\varepsilon}} dx dy \leq C \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (41)$$

Тогда $f \in W^{1,p}(\Omega)$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{N+p-\varepsilon}} dx dy = K_{p,N} \int_{\Omega} |\nabla f|^p dx. \quad (42)$$

Напомним, что стандартные соболевские пространства с дробными производными $W^{s,p}$, $0 < s < 1$, $1 < p < \infty$, снабжаются (полу) нормой Гальярдо

$$\|f\|_{W^{s,p}}^p = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy. \quad (43)$$

Хорошо известно, что величина $\|f\|_{W^{s,p}}$ не сходится к $\|f\|_{W^{1,p}}$ при $s \uparrow 1$; на самом деле, по предложению 2 она стремится к ∞ (если только f не константа). Теперь же ввиду следствия 4 мы можем утверждать, что

$$\lim_{s \uparrow 1} (1-s) \|f\|_{W^{s,p}}^p = \frac{K_{p,N}}{p} \int_{\Omega} |\nabla f|^p dx. \quad (44)$$

Это “восстанавливает” $W^{1,p}$ в качестве непрерывного предела пространств $W^{s,p}$ при $s \uparrow 1$ при условии, что мы используем нормы $(1-s)^{1/p} \|f\|_{W^{s,p}}$ в пространствах $W^{s,p}$.

В) Выбор 2:

$$\rho_\varepsilon(r) = \begin{cases} \frac{N}{\varepsilon^N}, & \text{если } r < \varepsilon, \\ 0, & \text{если } r > \varepsilon. \end{cases}$$

Этот выбор влечет

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^p} dx dy = \frac{K_{p,N}}{N} \int_{\Omega} |\nabla f|^p dx. \quad (45)$$

Модификация этого выбора:

$$\rho_\varepsilon(r) = \begin{cases} \frac{(N+p)r^p}{\varepsilon^{N+p}}, & r < \varepsilon, \\ 0, & r > \varepsilon, \end{cases}$$

влечет

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{N+p}} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{|x-y| < \varepsilon} |f(x) - f(y)|^p dx dy = \frac{K_{p,N}}{N+p} \int_{\Omega} |\nabla f|^p dx. \quad (46)$$

Аналогично можно получить

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{N+p}} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{\varepsilon < |x-y| < 2\varepsilon} |f(x) - f(y)|^p dx dy = \tilde{K}_{p,N} \int_{\Omega} |\nabla f|^p dx. \quad (47)$$

С) Выбор 3:

$$\rho_{\varepsilon}(r) = \begin{cases} 0, & r < \varepsilon, \\ \frac{1}{|\log \varepsilon| r^N}, & \varepsilon < r < 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

Этот выбор влечет

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\log \varepsilon|} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{|x-y| > \varepsilon} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{N+p}} dx dy = K_{p,N} \int_{\Omega} |\nabla f|^p dx. \quad (48)$$

Д) Выбор 4: Пусть $\gamma \in L^1_{\text{loc}}(0, +\infty)$ — такая неотрицательная функция, что

$$\int_0^{\infty} \gamma(r) r^{N+p-1} dr = 1.$$

Выбирая

$$\rho_{\varepsilon}(r) = \frac{1}{\varepsilon^{N+p}} \gamma\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) r^p,$$

получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{N+p}} \int_{\Omega} \int_{\Omega} |f(x) - f(y)|^p \gamma\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) dx dy = K_{p,N} \int_{\Omega} |\nabla f|^p dx$$

для каждой $f \in W^{1,p}$ (при $p > 1$) и для каждой $f \in BV$ (при $p = 1$). Применяя это равенство при $p = 1$ (случай BV) к $f = \chi_A$, мы получим новую *характеризацию* множеств *ограниченного периметра*: измеримое множество $A \subset \Omega$ имеет ограниченный периметр тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{\varepsilon^{N+1}} \int_A \int_{c_A} \gamma\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) dx dy \leq C \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

и в этом случае

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{N+1}} \int_A \int_{c_A} \gamma\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) dx dy = K_{1,N} \text{Per}(A).$$

§ 3. Возвращение к постоянным функциям

Все результаты § 1 – непосредственные следствия утверждений § 2, примененные к шару $B \subset \Omega$. Получаем, что f – постоянна в любом шаре B и, следовательно, f – постоянна на Ω , поскольку Ω – связна.

Заметим, что условие

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B \int_B \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy = 0 \quad (49)$$

влечет, во-первых, что $f \in BV$, и, во-вторых, что $\nabla f = 0$. Таким образом, f – постоянная функция.

В случае же, когда $p > 1$ и f принимает значения в $\mathbb{Z}$, достаточно предположить, что

$$\int_B \int_B \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^p} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy \leq C \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (50)$$

В самом деле, (50) влечет, что $f \in W^{1,p}$ (обратим внимание, что при $p = 1$ (50) влечет лишь, что $f \in BV$). Теперь можно воспользоваться тем, что функция f принимает значения в $\mathbb{Z}$, и заключить, что f – постоянная функция. Действительно, запишем

$$\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k,$$

где $A_k = \{x \in \Omega : f(x) = k\}$, и воспользуемся хорошо известным результатом Стам-паккья (см., например, лемму 7.7 в [13]), утверждающим, что $\nabla f = 0$ п.в. в A_k . Следовательно, $\nabla f = 0$ почти всюду на Ω .

Приведем альтернативное доказательство. Из (50) и условия $f: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ следует, что

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \frac{\rho_\varepsilon(|x - y|)}{|x - y|^{p-1}} dx dy \leq C.$$

Из чего легко следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \rho_\varepsilon(|x - y|) dx dy = 0.$$

Таким образом, f – постоянная функция.

Имеются интересные обобщения некоторых приведенных результатов на случай, когда отношение $\frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^p}$ заменено более общим выражением $\omega\left(\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}\right)$. Мы приведем два таких обобщения, сообщенные нам Р. Игнатом, В. Ли и А. Понсе.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – непрерывная функция такая, что $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0 \quad \forall t > 0$

$$\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2} dt = \infty. \quad (51)$$

Предположим, что функция $f \in L^1(\Omega)$ удовлетворяет

$$\int_\Omega \int_\Omega \omega\left(\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}\right) \frac{dx dy}{|x - y|^N} < \infty.$$

Тогда f – постоянная функция.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – непрерывная функция такая, что $\omega(0) = 0$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega(t)}{t} = \alpha > 0.$$

Предположим, что функция $f \in L^1(\Omega)$ удовлетворяет

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}\right) \rho_{\varepsilon}(|x - y|) dx dy \leq C \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Тогда $f \in BV$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}\right) \rho_{\varepsilon}(|x - y|) dx dy = \int_{\Omega} \overline{\omega}(|\nabla f_{ac}|) dx + \alpha K_{1,N} \int_{\Omega} |\nabla f_s| dx,$$

где $\overline{\omega}(t) = \int_{S^{N-1}} \omega(t|\sigma \cdot e|) d\sigma$ и $\nabla f = \nabla f_{ac} + \nabla f_s$ – разложение Радона–Никодима меры ∇f .

Следующий вопрос пока остается открытым:

ОТКРЫТАЯ ЗАДАЧА 2. Пусть Ω – (гладкая) связная, ограниченная область в $\mathbb{R}^N$. Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная (или даже гёльдерова) функция. Пусть $\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – непрерывная функция такая, что $\omega(0) = 0$ и $\omega(t) > 0$ при $t > 0$. (Здесь (51) может не выполняться.) Предположим, что

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}\right) \frac{|dx dy|}{|x - y|^N} < \infty.$$

Можно ли из этого заключить, что f – постоянная функция?

§ 4. Другой подход. Связь с VMO

Сначала мы напомним определение пространства $VMO(\Omega; \mathbb{R})$ (функций с исчезающей средней осцилляцией). Мы говорим, что функция $f \in VMO(\Omega; \mathbb{R})$, если $f \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{R})$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|B_{\varepsilon}(x)|^2} \int_{B_{\varepsilon}(x)} \int_{B_{\varepsilon}(x)} |f(y) - f(z)| dy dz = 0 \quad \text{равномерно по } x \in \Omega.$$

Пусть Ω – связное (открытое) множество в $\mathbb{R}^N$, и пусть $f \in VMO(\Omega; \mathbb{Z})$. Тогда f – постоянная функция. Это было уже отмечено в [10; §I.5, часть 2]. В самом деле, если мы положим

$$\overline{f}_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{|B_{\varepsilon}(x)|} \int_{B_{\varepsilon}(x)} f(y) dy,$$

тогда $\text{dist}(\overline{f}_{\varepsilon}(x), \mathbb{Z}) \rightarrow 0$ равномерно в Ω (см. [10; §I.1]) и, таким образом, найдется целое число k_{ε} такое, что $|\overline{f}_{\varepsilon}(x) - k_{\varepsilon}| \rightarrow 0$ равномерно в Ω . Следовательно, f – постоянная функция.

Функции, лежащие в $W^{s,p}(\Omega)$, принадлежат пространству $VMO(\Omega)$ при условии $sp \geq N$ (см. [10; §I.2]). Поэтому мы не можем непосредственно применить это рассуждение к нашей ситуации, которая соответствует, грубо говоря, случаю $sp \geq 1$. Однако мы можем воспользоваться методом *сведения к одномерному случаю*, как уже делалось в [5].

Предположим, для простоты, что Ω – квадрат в $\mathbb{R}^2$. Пусть $f \in W^{s,p}(\Omega)$. Тогда ограничения $f(x_1, \cdot)$ и $f(\cdot, x_2)$ принадлежат пространству $W^{s,p}(I)$ при почти всех x_1 и почти всех x_2 (где I – интервал) (см., например, [11; § 2]).

Это наблюдение очень полезно в сочетании со следующим утверждением из теории меры.

ЛЕММА (см., например, [11; лемма 2]). *Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ измерима. Предположим, что при почти всех x_1 функция $f(x_1, \cdot)$ и при почти всех x_2 функция $f(\cdot, x_2)$ являются постоянными. Тогда f – постоянна.*

Приведенные выше рассуждения влекут альтернативное доказательство следствия 1 при $p > 1$. В самом деле, при $p > 1$ условие (2) говорит, что $f \in W^{s,p}$, где $s = 1/p$. Ограничения f на почти каждую прямую также принадлежат пространству $W^{s,p}$ с $s = 1/p$. Следовательно, эти ограничения принадлежат VMO .

Поэтому для отображения $f: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ можно заключить, что ограничения f на почти каждую прямую являются постоянными функциями. Приведенная выше лемма позволяет заключить, что f – постоянная функция.

С помощью приведенного рассуждения можно получить следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – связна, и пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ – измеримая функция такая, что $f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_k$, где $f_0 \in W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R})$ и $f_i \in W^{s_i,p_i}(\Omega; \mathbb{R})$ с $s_i p_i \geq 1$ при $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда f – постоянная функция.*

ОТКРЫТАЯ ЗАДАЧА 3. Имеется ли простое естественное условие на f , которое могло бы заменить предположение декомпозиции $f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_k$? Существует ли изящный способ объединить теорему 6 с результатами § 1.

Еще одним интересным направлением исследований является

ОТКРЫТАЯ ЗАДАЧА 4. Найти оценки для

$$\left\| f - \int f \right\|$$

в терминах величин, используемых в этой работе, которые в различных ситуациях влекли бы, что f – постоянная функция. Некоторые результаты в этом направлении читатель может найти в [7] (см. также работу Мазы и Шапошниковой [17]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. A. Adams. Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975.
- [2] L. Ambrosio, P. Tilli. Selected Topics on “Analysis in Metric Spaces”. Lecture Notes. Pisa: Scuola Normale Superiore Pisa, 2000.
- [3] F. Bethuel, F. Demengel. Extensions for Sobolev mappings between manifolds // Calc. Var. Partial Differential Equations. 1995. V. 3. №4. P. 475–491.

- [4] J. Bourgain, H. Brézis, P. Mironescu. Lifting in Sobolev spaces // J. Anal. Math. 2000. V. 80. P. 37–86.
- [5] J. Bourgain, H. Brézis, P. Mironescu. On the structure of the Sobolev space $H^{1/2}$ with values into the circle // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2000. V. 331. №2. P. 119–124.
- [6] J. Bourgain, H. Brézis, P. Mironescu. Another look at Sobolev spaces // Optimal Control and Partial Differential Equations. In honour of Professor A. Bensoussan's 60th Birthday / ed. J. L. Menaldi et al. Amsterdam: IOS Press, 2001. P. 439–455.
- [7] J. Bourgain, H. Brézis, P. Mironescu. Limiting embedding theorems for $W^{s,p}$ when $s \uparrow 1$ and applications // J. Anal. Math. (to appear).
- [8] H. Brézis. Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Paris: Masson, 1983; Paris: Dunod, 1999.
- [9] H. Brézis, J.-M. Coron. Large solutions for harmonic maps in two dimensions // Comm. Math. Phys. 1983. V. 92. P. 203–215.
- [10] H. Brézis, L. Nirenberg. Degree theory of BMO. I: Compact manifolds without boundaries // Selecta Math. 1995. V. 1. №2. P. 197–263.
- [11] H. Brézis, Y. Li, P. Mironescu, L. Nirenberg. Degree and Sobolev spaces // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1999. V. 13. №2. P. 181–190.
- [12] J. Davila. On an open question about functions of bounded variation // Calc. Var. Partial Differential Equations (to appear).
- [13] Д. Гилбарг, Н. С. Трудингер. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
- [14] P. Hajlasz, P. Koskela. Sobolev met Poincaré. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. (Mem. Amer. Math. Soc. № 688.)
- [15] R. Hardt, D. Kinderlehrer, F. H. Lin. The variety of configurations of static liquid crystals // Variational Methods / ed. H. Berestycki et al. Boston: Birkhäuser, 1990. P. 115–131. (Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. V. 4.)
- [16] N. Korevaar, R. Schoen. Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets // Comm. Anal. Geom. 1993. V. 1. №4. P. 561–659.
- [17] V. Maz'ya, T. Shaposhnikova. On the Bourgain, Brézis and Mironescu theorem concerning limiting embeddings of fractional Sobolev spaces // J. Funct. Anal. (to appear).

Université Pierre et Marie Curie, Paris

E-mail: brezis@ann.jussieu.fr, brezis@ccr.jussieu.fr

Поступила в редакцию

05.04.2002