Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Фидлер, М. И. Вишик, Количественное усреднение глобальных аттракторов гиперболических волновых уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 75–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm534>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:03:58

УДК 517.95

КОЛИЧЕСТВЕННОЕ УСРЕДНЕНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ АТТРАКТОРОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М. И. Вишик, Б. Фидлер

Оценивается скорость сходимости решений и аттракторов к соответствующим решениям и аттракторам предельного усредненного уравнения.

Библиография: 17 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	75
§ 2. Локальные и глобальные оценки роста	83
§ 3. Ключевые оценки нелинейности	85
§ 4. Доказательство теорем 1.3 и 1.1	88
§ 5. Близость аттракторов к экспоненциальному	91
Список литературы	94

§ 1. Введение

Мы дадим количественные оценки сходимости решений гиперболических волновых уравнений с быстро осциллирующими по пространству коэффициентами к решениям предельного (усредненного) уравнения на примере следующего скалярного уравнения:

$$\partial_t^2 u + \gamma^\varepsilon(x, x/\varepsilon) \partial_t u = \Delta u - b(x, x/\varepsilon) f(u) + g(x, x/\varepsilon), \quad (1.1)$$

$u \in \mathbb{R}$. Здесь x принадлежит ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и наложены нулевые краевые условия Дирихле:

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \quad (1.2)$$

Мы предполагаем быструю сходимость диссипативного коэффициента γ^ε в следующей форме:

$$\gamma^\varepsilon(x, z) = \gamma^0(x) + \varepsilon \tilde{\gamma}(x, z). \quad (1.3)$$

Наши оценки для индивидуальных траекторий будут включать случай отрицательной диссипации. Положительная диссипация $\gamma^0 > 0$ будет предполагаться лишь при количественной оценке сходимости глобальных аттракторов к глобальному аттрактору усредненного уравнения. Уравнение (1.1) возникает, например, в контексте релятивистской квантовой механики; см. [17; гл. IV. 3] и библиографию там же. Ниже

мы наложим на $b = b(x, z)$ и $g = g(x, z)$ диофантово условие квазипериодичности по быстрой пространственной переменной $z = x/\varepsilon$. На самом деле нам необходимо лишь более слабое условие, состоящее в дивергентной представимости функций b и g по быстрой переменной z ; см. (1.16)–(1.21) ниже. В случае параболических систем уравнений реакции-диффузии те же дивергентные представления (1.16)–(1.19) тоже влекут количественные оценки близости к предельному случаю, см. [7].

Хотя $\tilde{\gamma}$, b , f , g могут явно зависеть от ε , мы опускаем эту зависимость, чтобы не усложнять обозначения. Для корректной постановки задачи мы потребуем

$$b = b(x, z) \in C^0(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n), \quad 0 \leq b \leq \beta_1 < \infty, \quad (1.4)$$

и

$$\|g(\cdot, \cdot / \varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \quad (1.5)$$

$$\|\gamma^\varepsilon(\cdot, \cdot / \varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \quad (1.6)$$

равномерно при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ с некоторой константой C . Здесь $g(\cdot, \cdot / \varepsilon)$, $\gamma^\varepsilon(\cdot, \cdot / \varepsilon)$ обозначают функции $x \mapsto g(x, x/\varepsilon)$, $\gamma^\varepsilon(x, x/\varepsilon)$, которые предполагаются корректно определенными и лежащими в пространствах $L^2(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ соответственно. Неотрицательность коэффициента b предполагается для того, чтобы фиксировать знак приведенного ниже условия диссипативности на нелинейность $f = f(u)$. Пусть F обозначает первообразную функции f , т.е. $F'(u) = f(u)$. Мы предполагаем, что

$$F(u) \geq -\delta u^2 - C_\delta \quad (1.7)$$

для некоторого достаточно малого $\delta > 0$. Будет достаточно взять $\delta < \frac{1}{2}\lambda_1(\Omega)/\beta_1$, где $\lambda_1(\Omega)$ обозначает первое собственное число оператора $-\Delta$ на Ω с нулевыми краевыми условиями Дирихле. Мы предполагаем, что нелинейность $f = f(u)$ является C^1 -гладкой, и требуем полиномиальность роста производной:

$$|f'(u)| \leq C(1 + |u|^{p-1}) \quad \text{при некотором } 1 \leq p \leq \frac{n}{n-2} \quad (1.8)$$

в случае $n = \dim x \geq 3$. Заметим, что предельный случай $p = n/(n-2)$ соболевского вложения $H_0^1 \hookrightarrow L^{n/(n-2)} = L^{2n/(n-2)}$ также допускается. Здесь и далее мы не накладываем ограничений на степень полиномиального роста p в случае размерностей $n = 1, 2$.

При сделанных предположениях существуют глобальные решения

$$u = u^\varepsilon(t, x), \quad t \geq 0, \quad (1.9)$$

семейства задач Коши (1.1), (1.2) с заданными начальными данными:

$$\begin{aligned} u &= u_0(x), \\ u_t &= v_0(x) \end{aligned} \quad (1.10)$$

при $t = 0$; см. [17], [2], [3], а также §2. Задача (1.1), (1.2) порождает полугруппу решений $y^\varepsilon = (u^\varepsilon, v^\varepsilon) = (u^\varepsilon, u_t^\varepsilon) = S^\varepsilon(t)(u_0, v_0)$ в гильбертовом пространстве

$$E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \quad (1.11)$$

При некоторых дополнительных предположениях мы будем количественно изучать сходимость

$$y^\varepsilon \rightarrow y^0 \quad (1.12)$$

этих решений в более слабых пространствах

$$E_{-\alpha} := H^{1-\alpha} \times H^{-\alpha}, \quad (1.13)$$

$0 < \alpha \leq 1$, при усреднении $\varepsilon \searrow 0$ быстрой пространственной осцилляции. Напомним, что $H^{-\alpha} := \mathcal{D}((-\Delta)^{-\alpha/2})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, обозначает семейство пространств, ассоциированных с дробными степенями оператора $-\Delta$ с нулевыми краевыми условиями Дирихле. Заметим, что $H^0 = H = L^2(\Omega)$, $H^1 = H_0^1(\Omega)$, $E = E_0$, $H^2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ и дуальными к этим пространствам являются H , H^{-1} и т.д.

Чтобы установить сходимость, мы рассмотрим усредненное уравнение

$$u_{tt} + \gamma^0(x)u_t = \Delta u - b^0(x)f(u) - g^0(x) \quad (1.14)$$

в Ω . Мы предполагаем, что b^0 , g^0 существуют в следующем слабом смысле:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(x) \gamma^\varepsilon(x, x/\varepsilon) dx &\xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Omega} \varphi(x) \gamma^0(x) dx, \\ \int_{\Omega} \varphi(x) b(x, x/\varepsilon) dx &\xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Omega} \varphi(x) b^0(x) dx, \\ \int_{\Omega} \psi(x) g(x, x/\varepsilon) dx &\xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Omega} \psi(x) g^0(x) dx \end{aligned} \quad (1.15)$$

для всех $\varphi \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in L^2(\Omega)$. Обозначим решения усредненной задачи (1.14) с теми же начальными данными (1.10) через $u^0(t, x)$ и положим $y^0 = (u^0, v^0) = (u^0, u_t^0) \in E$.

Чтобы получить *количественную* оценку сверху для разности $y^\varepsilon(t) - y^0(t)$, необходимо такое же дивергентное представление для b, g , как и в параболическом случае, см. [7]. А именно, мы предполагаем, что существуют функции $G_k = G_k(x, z)$ такие, что

$$g(x, z) - g^0(x) = \sum_{i=1}^n \partial_{z_i} G_i(x, z) \quad (1.16)$$

выполнено при $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$. Мы предполагаем также, что неравенства

$$\begin{aligned} \|G_i(\cdot, \cdot/\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C, \\ \|\partial_{x_i}^1 G_i(\cdot, \cdot/\varepsilon)\|_{L^{2n/(n+2)}(\Omega)} &\leq C \end{aligned} \quad (1.17)$$

выполнены равномерно для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Здесь $\partial_{x_i}^1$ обозначает частную производную по x_i в точке (x, z) от функции $(x, z) \mapsto G(x, z)$. Мы, конечно же, предполагаем, что все выражения корректно определены. Аналогично, для b мы предполагаем дивергентное представление функциями $B_i = B_i(x, z)$ такое, что

$$b(x, z) - b^0(x) = \sum_{i=1}^n \partial_{z_i} B_i(x, z) \quad (1.18)$$

с ε -равномерными оценками

$$\begin{aligned} \|B_i(\cdot, \cdot / \varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C, \\ \|\partial_{x_i}^1 B_i(\cdot, \cdot / \varepsilon)\|_{L^n(\Omega)} &\leq C. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Далее в §3 мы напомним достаточные условия для существования подобных дивергентных представлений для функций $b(x, z)$, $g(x, z)$ в терминах диофантовых частот квазипериодичности по z . См. также [7].

Наконец, для диссипативных коэффициентов $\gamma^\varepsilon(x, z)$, $\gamma^0(x)$ мы потребуем выполнения условия

$$\gamma^\varepsilon(x, z) - \gamma^0(x) = \varepsilon \tilde{\gamma}(x, z). \quad (1.20)$$

Заметим, что в отличие от b, g , мы требуем, чтобы возмущение было порядка ε . Однако мы не требуем дивергентного представления для $\tilde{\gamma}$. Взамен мы требуем большую регулярность γ^0 :

$$\begin{aligned} \|\gamma^0(\cdot)\|_{L^\infty} + \|\gamma^0(\cdot)\|_{W^{1,n}} &\leq C, \\ \|\tilde{\gamma}(\cdot, \cdot / \varepsilon)\|_{L^\infty} + \|\tilde{\gamma}(\cdot, \cdot / \varepsilon)\|_{W^{1,n}} &\leq C. \end{aligned} \quad (1.21)$$

В частности, эти неравенства усиливают наше предыдущее условие ограниченности L^∞ -нормы (1.6). Условия (1.20), (1.21) вместе могут рассматриваться как количественная версия сходимости $\gamma^\varepsilon \rightarrow \gamma^0$ при $\varepsilon \searrow 0$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнены предположения (1.4)–(1.8). Предположим, что быстро осциллирующие коэффициенты $b(x, x/\varepsilon)$, $g(x, x/\varepsilon)$ удовлетворяют условию слабой сходимости (1.15) и дивергентному представлению (1.16)–(1.19), а диссипативный коэффициент $\gamma^\varepsilon(x, x/\varepsilon)$ удовлетворяет условиям сходимости (1.20), (1.21). Рассмотрим решения $y^\varepsilon = (u^\varepsilon(t, x), u_t^\varepsilon(t, x))$ семейства задач (1.1), (1.2) и решение $y^0 = (u^0(t, x), u_t^0(t, x))$ усредненной задачи (1.14), (1.2) с одинаковыми начальными данными $y_0 = (u_0(x), v_0(x)) \in E = E_0 = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ при $t = 0$. Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$.

Тогда для любого $0 < \alpha \leq 1$ существуют константы $c_0, c_1, c_2, \varrho > 0$, которые зависят от α , $\|y_0\|_{E_0}$ и других параметров задач, но не зависят от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, такие, что разность $y^\varepsilon - y^0$ оценивается с помощью повторной экспоненты следующим образом:

$$\|y^\varepsilon(t) - y^0(t)\|_{E_{-\alpha}} \leq \varepsilon^\alpha \exp(c_2 \exp(\varrho t) + c_1 t + c_0) \quad (1.22)$$

равномерно при всех $t \geq 0$.

Данная оценка повторной экспонентой также справедлива для случая, когда диссипативный коэффициент $\gamma^0(x)$ принимает отрицательные значения.

Если же диссипативный коэффициент $\gamma^0(x)$ обладает строго положительной нижней гранью $\gamma^0(x) \geq \underline{\gamma} > 0$, то оценка может быть улучшена до экспоненциальной:

$$\|y^\varepsilon(t) - y^0(t)\|_{E_{-\alpha}} \leq C \varepsilon^\alpha \exp(\varrho t) \quad (1.23)$$

для подходящей константы C .

Теперь обратимся к сходимости глобальных аттракторов $\mathcal{A}^\varepsilon \rightarrow \mathcal{A}^0$, где $\mathcal{A}^\varepsilon$ отвечает глобальным решениям $y^\varepsilon = (u^\varepsilon, u_t^\varepsilon)$ задачи (1.1), (1.2), а $\mathcal{A}^0$ – решениям усредненной задачи (1.14), (1.2). В [3], [17] можно найти необходимые сведения для общего

ознакомления с глобальными аттракторами, т.е. минимальными множествами, притягивающими каждое ограниченное множество. Для существования и равномерной ограниченности, а также для относительной компактности $\bigcup_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0} \mathcal{A}^\varepsilon$ в $E = E_0$ мы усилим наши предположения (1.7), (1.8) на нелинейность $f(u)$ и ее первообразную $F(u)$; см. также [3], [17]. Мы потребуем выполнения неравенства

$$f(u)u \geq -\delta u^2 - C_\delta \quad (1.24)$$

с некоторым δ , которое, как и раньше, удовлетворяет неравенству $\delta < \frac{1}{2}\lambda_1(\Omega)/\beta_1$. Более того, мы усилим предположение на рост производной (1.8) до условия

$$|f'(u)| \leq C(1 + |u|^{p-1}) \quad \text{с некоторым } 1 \leq p < \frac{n}{n-2} \quad (1.25)$$

при $n = \dim x \geq 3$. Заметим, что мы лишь отказались от предельного случая $p = n/(n-2)$. В качестве упрощающего (но не существенного) условия мы потребуем выполнения следующего условия Гёльдера для $f'(u)$:

$$|f'(u_1) - f'(u_2)| \leq C(1 + |u_1|^\beta + |u_2|^\beta)|u_1 - u_2|^\theta \quad (1.26)$$

с некоторыми положительными константами C, β, θ такими, что $\beta + \theta < 2/(n-2)$.

Мы потребуем строгой положительности диссипативного коэффициента: $\gamma^0(x) > 0$. Тогда для предельного уравнения (1.14) с краевыми условиями (1.2) гамильтониан

$$\Phi(y^0) := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\partial_t u^0|^2 + \frac{1}{2} |\nabla u^0|^2 + b^0 F(u^0) - g^0 u^0 \right) dx \quad (1.27)$$

становится функцией Ляпунова. Мы дополнительно потребуем, чтобы все стационарные решения $(U, 0) \in E_0$ задачи (1.14), (1.2) были гиперболическими. Стационарное решение U удовлетворяет уравнению

$$0 = \Delta U - b^0 f(U) + g^0 \quad (1.28)$$

с нулевыми граничными условиями Дирихле. Гиперболичность означает, что линеаризованное уравнение

$$\lambda^2 u + \lambda \gamma^0 u = \Delta u - b^0 f'(U)u \quad (1.29)$$

обладает лишь тривиальным решением $u = 0$ в $H_0^1(\Omega)$ при $\operatorname{Re} \lambda = 0$. Это влечет конечность числа стационарных решений, свойство седловой точки около (каждого) стационарного решения U_j , существование конечномерного неустойчивого многообразия $W_j^u \subset E_0$ и конечное разложение Морса

$$\mathcal{A}^0 = \bigcup_j W_j^u \quad (1.30)$$

глобального аттрактора $\mathcal{A}^0$. Как показано в [3], [6], в этом случае глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$ является экспоненциально притягивающим множеством:

$$\operatorname{dist}_{E_0}(y^0(t), \mathcal{A}^0) \leq C e^{-\nu t} \quad (1.31)$$

с некоторыми положительными постоянными C, ν , которые зависят только от $\|y^0(0)\|_E$ (см. также § 5).

ТЕОРЕМА 1.2. *Предположим, что справедливы предположения теоремы 1.1, а также (1.24)–(1.26). Пусть диссипативный коэффициент положителен: $\gamma^0 > 0$, и не зависит от x . Пусть все стационарные решения U задачи (1.14), (1.2) удовлетворяют условию гиперболичности (1.29). Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$ и $0 < \alpha \leq 1$.*

Тогда существует константа $C > 0$ такая, что неравенство

$$\text{dist}_{E_{-\alpha}}(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0) := \sup_{y \in \mathcal{A}^\varepsilon} \text{dist}_{E_{-\alpha}}(y, \mathcal{A}^0) \leq C\varepsilon^{\alpha'} \quad (1.32)$$

выполнено равномерно по $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Здесь показатель α' связан с показателем экспоненциального притяжения ν к аттрактору $\mathcal{A}^0$ в (1.31) и показателем экспоненциального роста ϱ в оценке близости к предельному решению (1.23) посредством соотношения

$$\alpha' = \alpha / (1 + \varrho / \nu). \quad (1.33)$$

Наши доказательства теорем 1.1 и 1.2 будут основываться на неравенствах гронуолловского типа, которые могут быть сформулированы в общих, абстрактных терминах сильно непрерывных полугрупп нелинейных операторов, отвечающих полулинейным уравнениям. В качестве основы для последующих рассуждений мы сейчас опишем эти абстрактные понятия. Такой подход также может быть применен к изучению, например, гиперболических систем. Основы теории сильно непрерывных полугрупп можно найти в [13], [14], [16]. В конце настоящего введения, после формулировки абстрактной теоремы 1.3, мы кратко объясним, как наш частный пример волнового гиперболического уравнения (1.1) с краевыми условиями (1.2) укладывается в эту абстрактную схему; см. также [17]. Оценки *аналитических* полугрупп в пространствах с дробными показателями см. в [8].

Рассмотрим семейство банаховых пространств $E_{-\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Предположим, что для норм $\|\cdot\|_{-\alpha}$ на $E_{-\alpha}$ справедливы интерполяционные неравенства

$$\|y\|_{-\alpha} \leq C_\alpha \|y\|_0^{1-\alpha} \|y\|_{-1}^\alpha. \quad (1.34)$$

Пусть A порождает сильно непрерывную полугруппу линейных операторов $\exp(At)$, $t \geq 0$, в пространствах E_0, E_{-1} . При $\alpha = 0, 1$ мы также потребуем выполнения следующей оценки для полугруппы:

$$\|\exp(At)\|_{\mathcal{L}(E_{-\alpha})} \leq M \exp(\tilde{\varrho}_0 t) \quad (1.35)$$

при каждом $t \geq 0$ и подходящих постоянных $M \geq 1$, $\tilde{\varrho}_0 \in \mathbb{R}$. Здесь $\mathcal{L}(E_{-\alpha}) = \mathcal{L}(E_{-\alpha}, E_{-\alpha})$ – банахово пространство ограниченных линейных операторов, действующих из $E_{-\alpha}$ в $E_{-\alpha}$, с обычной операторной нормой.

Для $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ обозначим через $y^\varepsilon = y^\varepsilon(t) \in E_0$ слабое решение полулинейного уравнения

$$\frac{d}{dt} y^\varepsilon = Ay^\varepsilon + \mathcal{F}_\varepsilon(y^\varepsilon) \quad (1.36)$$

с начальными данными

$$y^\varepsilon(0) = y_0 \in E_0. \quad (1.37)$$

Здесь и далее под *слабым решением* мы понимаем решение следующего интегро-операторного уравнения:

$$y^\varepsilon(t) = \exp(At)y_0 + \int_0^t \exp(A(t-\tau))\mathcal{F}_\varepsilon(y^\varepsilon(\tau)) d\tau. \quad (1.38)$$

Мы будем предполагать, что слабые в этом смысле решения y^ε существуют при всех $t \geq 0$, причем $y^\varepsilon \in C^0([0, +\infty), E_0)$, и удовлетворяют оценке не более чем экспоненциального роста

$$\|y^\varepsilon(t)\|_0 \leq M \exp(\varrho_0 t) \quad (1.39)$$

при всех $t \geq 0$ с подходящими константами $M \geq 1$, $\varrho_0 \in \mathbb{R}$, которые могут зависеть от $\|y_0\|_0$, но не от $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Мы не будем накладывать абстрактного условия на нелинейность

$$\mathcal{F}_\varepsilon: E_0 \rightarrow E_0, \quad (1.40)$$

которое гарантирует равномерность по ε глобальной экспоненциальной оценки (1.39). Для большей гибкости мы наложим условие (1.39) непосредственно. В нашем частном случае гиперболического волнового уравнения (1.1) оценку (1.39) можно доказать, например, используя энергетическое неравенство; см. §2. Однако мы наложим два существенных условия на “усредненную” нелинейность $\mathcal{F}_0$ и разность $\mathcal{F}_\varepsilon - \mathcal{F}_0$ в более слабом пространстве E_{-1} :

$$\|\mathcal{F}'_0(y)\|_{\mathcal{L}(E_{-1}, E_{-1})} \leq C(1 + \|y\|_0^{p_1}), \quad (1.41)$$

$$\|\mathcal{F}_\varepsilon(y) - \mathcal{F}_0(y)\|_{-1} \leq C(1 + \|y\|_0^{p_0})\varepsilon. \quad (1.42)$$

Здесь $C, p_0, p_1 \geq 1$ – подходящие константы, не зависящие ни от ε , ни от $y \in E_0$. Заметим, что условие (1.41), примененное к паре $\mathcal{F}_\varepsilon, \mathcal{L}(E_0, E_0)$ вместо пары $\mathcal{F}_0, \mathcal{L}(E_{-1}, E_{-1})$, влечет в силу обычной локальной липшицевой оценки локальное существование единственного слабого решения y^ε в E_0 . Подробности см. в §2.

ТЕОРЕМА 1.3. *Предположим, что условия (1.34), (1.35), (1.39)–(1.42) выполнены для полулинейных уравнений (1.36) и их слабых решений $y^\varepsilon(t)$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, с начальными данными $y^\varepsilon(0) = y_0 \in E_0$.*

Тогда существуют положительные константы c_0, c_1, c_2 , не зависящие от ε, α , такие, что равномерно по $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $0 \leq \alpha \leq 1$ выполняется следующая повторно экспоненциальная оценка:

$$\|y^\varepsilon(t) - y^0(t)\|_{-\alpha} \leq \varepsilon^\alpha \exp(c_2 \exp(\varrho t) + c_1 t + c_0). \quad (1.43)$$

Здесь $\varrho := \varrho_0 p$ ($\varrho_0 > 0$), где $p := \max(p_0, p_1)$, а параметры ϱ_0, p_1 и p_0 определяются неравенствами (1.39), (1.41) и (1.42). Зависимость c_j от y_0 и α может быть явно выражена посредством констант $M, \tilde{\varrho}_0, \varrho_0, p_0, p_1$ и C следующим образом:

$$\begin{aligned} c_0 &= (1 - \alpha) \log(2M) + \log C_\alpha, \\ c_1 &= (1 - \alpha)\varrho_0 + \alpha(MC + \tilde{\varrho}_0), \\ c_2 &= \alpha \varrho^{-1} M^{p+1} C. \end{aligned} \quad (1.44)$$

В качестве замечания к теореме 1.3 мы отметим специальный случай $\varrho = \varrho_0 = 0$, т.е. когда справедлива оценка

$$\|y^\varepsilon(t)\|_0 \leq M(y_0) \quad (1.45)$$

для всех $t \geq 0$. Этот случай включает в себя консервативный случай (без диссипации), при котором решения остаются ограниченными, а также диссипативный случай, когда решения со временем попадают в фиксированный большой шар.

Тогда повторно экспоненциальная оценка (1.43) может быть улучшена до экспоненциальной

$$\|y^\varepsilon(t) - y^0(t)\|_{-\alpha} \leq \varepsilon^\alpha \exp(c_1 t + c_0), \quad (1.46)$$

где c_0 такое же, как и в (1.44), а c_1 дается следующим явным выражением:

$$c_1 = \alpha(MC(1 + M^p) + \tilde{\varrho}_0). \quad (1.47)$$

Доказательство следует из неравенств (4.16), (4.17) в § 4.

Доказательство теоремы 1.3 приведено в § 4 настоящей статьи. Опишем содержание оставшихся параграфов и схему доказательства теорем 1.1, 1.2, а также стандартную полугрупповую переформулировку гиперболического волнового уравнения (1.1) с краевыми условиями (1.2). Равномерная по ε оценка экспоненциального роста (1.39) нормы $\|y^\varepsilon(t)\|_0$ в E_0 будет доказана в § 2. Ключевые оценки (1.41) и (1.42) на $\mathcal{F}'_0(y)$ и на разность $\mathcal{F}_\varepsilon(y) - \mathcal{F}_0(y)$ в пространстве E_{-1} для нелинейности, соответствующей гиперболическому волновому уравнению, будут даны в § 3. Вместе эти оценки позволят вывести теорему 1.1 из теоремы 1.3. Доказательство теоремы 1.2 о количественных оценках глобальных аттракторов $\mathcal{A}^\varepsilon$, $\mathcal{A}^0$ будет отложено до § 5.

Вернемся к стандартной полугрупповой переформулировке (1.36) гиперболического волнового уравнения (1.1). Пусть $y = (u, v) \in E_{-\alpha} := H^{1-\alpha} \times H^{-\alpha}$. Заметим, что интерполяционное неравенство (1.34) для этих пространств следует из интерполяционных неравенств в соболевских пространствах $H^\alpha = \mathcal{D}((-\Delta)^{\alpha/2})$; см. [12], [14], [16], [17]. Положим

$$Ay = A(u, v) := (v, \Delta u) \quad (1.48)$$

с областью определения $\mathcal{D}(A) = E_{-\alpha+1}$ в $E_{-\alpha}$. Тогда A порождает сильно непрерывную полугруппу линейных операторов $\exp(At)$ на $E_{-\alpha}$. В частности, справедлива оценка (1.35), причем с константами $M = 1$ и $\tilde{\varrho}_0 = 0$. При $\alpha = 0$ это следует из того, что полугруппа $\exp(At)$ сохраняет норму пространства E_0 , которая является энергетической нормой; см. [14], [16]. Для остальных $\alpha \in \mathbb{R}$ это следует из того, что оператор $(-\Delta)^{\alpha/2} : E_0 \rightarrow E_{-\alpha}$ коммутирует с полугруппой $\exp(At)$ и определяет ограниченный линейный изоморфизм (который можно рассматривать как изометрию) между E_0 и $E_{-\alpha}$.

Зададим нелинейность $\mathcal{F}_\varepsilon(y)$ в (1.36) следующим образом:

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u, v) := (0, -b^\varepsilon f(u) + g^\varepsilon - \gamma^\varepsilon v). \quad (1.49)$$

Здесь $b^\varepsilon = b(x, x/\varepsilon)$ и т.д. Ясно, что соотношения (1.48), (1.49) делают абстрактное полулинейное уравнение (1.36) эквивалентным полулинейному гиперболическому волновому уравнению (1.1), переписанному как система первого порядка для $(u, v) = (u, \partial_t u)$. Поэтому сначала, в § 3, мы докажем технические неравенства (1.41), (1.42)

на нелинейности $\mathcal{F}_\varepsilon$ и $\mathcal{F}_0$, а потом, в § 4, мы вернемся к абстрактной теореме 1.3. Дивергентные представления (1.16)–(1.21) используются, чтобы доказать неравенства (1.41), (1.42).

Еще раз отметим, что с помощью приведенной абстрактизации мы получим повторно экспоненциальную оценку для решений гиперболического волнового уравнения, включая случаи, когда диссипативный коэффициент $\gamma^0(x)$ принимает отрицательные значения. В случае постоянной положительной диссипации $\gamma^0 > 0$ мы также докажем количественную оценку для глобальных аттракторов.

Благодарности. Настоящая работа была поддержана несколькими визитами первого автора в Берлин по программе премии Александра фон Гумбольдта, которые были чрезвычайно полезны второму автору. Мы благодарны Йоргу Шмелингу за полезные обсуждения диофантовых аппроксимаций. Оба автора глубоко благодарны Регине Лёр за квалифицированный и тщательный набор многочисленных версий. Эта работа была также поддержана Немецким обществом исследований и Российским фондом фундаментальных исследований.

§ 2. Локальные и глобальные оценки роста

В этом параграфе мы напомним основы теории локального существования и единственности слабых (в смысле (1.38)) решений $y^\varepsilon = (u^\varepsilon, \partial_t u^\varepsilon) \in E_0 = H_0^1 \times L^2$ гиперболического волнового уравнения (1.1) с нулевыми граничными условиями Дирихле (1.2). Используемые обозначения и предположения описаны в § 1. В частности, там описано сведение к абстрактному полулинейному уравнению $\frac{d}{dt}y^\varepsilon = Ay^\varepsilon + \mathcal{F}_\varepsilon(y^\varepsilon)$ с начальными данными $y^\varepsilon(0) = y_0 \in E_0$ (см. (1.36), (1.37)). Сначала мы докажем, что для нелинейности, соответствующей уравнению (1.1), справедливо следующее условие локальной липшицевости:

$$\|\mathcal{F}'_\varepsilon(y)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq C(1 + \|y\|_0^{p-1}). \quad (2.1)$$

Эта оценка является ключевой для локального существования и единственности решений $y^\varepsilon(t)$ уравнения (1.36); см., например, [16], [14]. Потом (при предположениях § 1) мы докажем глобальную экспоненциальную оценку роста (1.39) для решений уравнения (1.1) с краевыми условиями (1.2).

Напомним, что при выводе этой оценки мы допускаем *отрицательные* значения диссипативного коэффициента $\gamma^\varepsilon(x)$. В случае *положительной* диссипации мы получим глобальную ограниченность решений; более того, в этом случае существует глобальный аттрактор.

Для доказательства локального условия Липшица (2.1), а также для дальнейшего изложения мы отметим следующие простые неравенства

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{2n/(n-2)}} &\leq C\|u\|_{H_0^1}, \\ \|f(u)\|_{L^2} &\leq C(1 + \|u\|_{H_0^1}^p), \\ \|f'(u)\|_{L^n} &\leq C(1 + \|u\|_{H_0^1}^{p-1}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Эти неравенства непосредственно следуют из оценки роста (1.8) на $f'(u)$ и стандартного вложения Соболева $H_0^1 \hookrightarrow L^{2n/(n-2)}$.

Докажем неравенство (2.1) в $E_0 = H_0^1 \times L^2$. Неравенство (2.1) вытекает из определения (1.49) нелинейности $\mathcal{F}_\varepsilon$ в силу следующих двух равномерных по ε неравенств:

$$\begin{aligned} \|b^\varepsilon f'(u)\tilde{u}\|_{L^2} &\leq C(1 + \|u\|_{H_0^1}^{p-1})\|\tilde{u}\|_{H_0^1}, \\ \|\gamma^\varepsilon \tilde{v}\|_{L^2} &\leq C\|\tilde{v}\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Второе из этих неравенств является тривиальным следствием условия (1.6) равномерной по ε ограниченности L^∞ -нормы коэффициента $\gamma^\varepsilon = \gamma^\varepsilon(\cdot, \cdot/\varepsilon)$. Аналогично условие ε -равномерной ограниченности величины b константой β_1 , наложенное в (1.4), сводит первое неравенство в (2.3) к обычному неравенству Гёльдера:

$$\|f'(u)\tilde{u}\|_{L^2} \leq \|f'(u)\|_{L^n} \|\tilde{u}\|_{L^{2n/(n-2)}}. \quad (2.4)$$

Действительно, применяя неравенства (2.2), мы приходим к (2.3). Теперь можно воспользоваться стандартной теорией сильно непрерывных полугрупп, из которой следует *локальное* существование и единственность слабых (в смысле (1.38)) решений $y^\varepsilon = (u^\varepsilon, \partial_t u^\varepsilon) \in H_0^1 \times L^2 = E_0$.

Докажем глобальную экспоненциальную оценку (1.39), которая влечет существование и единственность *глобально* по времени. Доказательство будет основано на экспоненциальном неравенстве гронуолловского типа для гамильтониана

$$\Phi(u, \partial_t u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\partial_t u|^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + bF(u) - gu \right) dx, \quad (2.5)$$

введенного выше в (1.27). Дифференцируя по времени t , убеждаемся, что вдоль решений $(u, \partial_t u)$ справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt} \Phi(u, \partial_t u) = - \int_{\Omega} \gamma^\varepsilon |\partial_t u|^2 dx. \quad (2.6)$$

В (2.6) мы пишем производную по времени от Φ лишь для удобства записи. Более точно это соотношение следует записывать в проинтегрированной по времени форме.

Квадратическая оценка снизу (1.7) на первообразную F нелинейности f в свою очередь влечет

$$\Phi(u, \partial_t u) \geq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\partial_t u|^2 + \delta' |\nabla u|^2 - C \right) dx \quad (2.7)$$

при некотором $0 < \delta' < \frac{1}{2} - \beta_1 \delta / \lambda$ и некоторой постоянной $C > 0$. Мы здесь также использовали равномерную по ε ограниченность (1.5) функции g в L^2 .

Пусть $\underline{\gamma} - \varepsilon$ -независимая существенная нижняя грань диссипативного коэффициента $\gamma^\varepsilon(\cdot, \cdot/\varepsilon)$. Мы сначала рассмотрим случай $\underline{\gamma} \leq 0$, который включает отрицательную диссипацию. Тогда соотношения (2.6), (2.7), рассмотренные вместе, влекут

$$\frac{d}{dt} (\Phi + C) \leq -\underline{\gamma} \int_{\Omega} |\partial_t u|^2 dx \leq -2\underline{\gamma} (\Phi + C). \quad (2.8)$$

Теперь стандартный гронуолловский аргумент дает ε -равномерную экспоненциальную оценку роста

$$\Phi(y^\varepsilon(t)) + C \leq M' \exp(-2\underline{\gamma}t). \quad (2.9)$$

Здесь $M' = \Phi(y_0) + C$ зависит от $\|y_0\|_{E_0}$, но не от ε . Из неравенства (2.7) следует, что квадрат энергетической нормы $\|y^\varepsilon(t)\|_0^2$ можно оценить сверху через $\Phi + C$, из чего получаем глобальную экспоненциальную оценку роста (1.39) с $\varrho_0 := -\underline{\gamma}$.

Следует отметить недиссипативный гамильтонов случай $\gamma^\varepsilon \equiv 0$, для которого $\underline{\gamma} = 0$ и неравенство (1.39) превращается в условие ограниченности константой $\bar{M} = M(\|y_0\|_0)$. В случае равномерной по x и ε положительности диссипативного коэффициента $\gamma^\varepsilon(\cdot, \cdot/\varepsilon) \geq \underline{\gamma} > 0$ гамильтонов функционал Φ становится функцией Ляпунова, которая убывает вдоль траекторий. Это дает асимптотическую ограниченность гамильтониана Φ и влечет диссипативность в E_0 в этом случае; см. также [3] и § 5.

§ 3. Ключевые оценки нелинейности

В этом параграфе мы докажем ключевые неравенства (1.41), (1.42). Напомним, что эти два соотношения были *предположены* выполненными в нашей абстрактной теореме 1.3, сформулированной для абстрактного полугруппового уравнения (1.36). Доказательство этой абстрактной теоремы будет приведено в § 4. Настоящий параграф посвящен доказательству того, что условия (1.41), (1.42) действительно выполнены в случае гиперболического волнового уравнения (1.1) с краевыми условиями (1.2). Напомним, что мы используем обозначения

$$\begin{aligned} y^\varepsilon &= (u^\varepsilon, v^\varepsilon), \\ E_0 &= H_0^1 \times L^2, \\ E_{-1} &= L^2 \times H^{-1}, \\ \mathcal{F}_\varepsilon(u, v) &= (0, -b^\varepsilon f(u) + g^\varepsilon - \gamma^\varepsilon v). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Доказывая (1.41), (1.42), мы будем исходить из предположений теоремы 1.1 и, в частности, из дивергентных представлений (1.16)–(1.19). При таком подходе теорема 1.1 будет следовать из теоремы 1.3. В конце этого параграфа мы напомним достаточные условия дивергентных представлений (1.16)–(1.19) для случая квазипериодичных коэффициентов $b^\varepsilon, g^\varepsilon$ в терминах оценок их диофантовых частот.

Сначала мы докажем неравенство (1.41), которое является E_{-1} -аналогом условия локальной липшицевости (2.1), (2.3). Действительно, неравенство (1.41) с $p_1 := p - 1$ следует из двух самостоятельных неравенств

$$\begin{aligned} \|b^0 f'(u) \tilde{u}\|_{H^{-1}} &\leq C(1 + \|u\|_{H_0^1}^{p-1}) \|\tilde{u}\|_{L^2}, \\ \|\gamma^0 \tilde{v}\|_{H^{-1}} &\leq C \|\tilde{v}\|_{H^{-1}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Достаточно доказать эти неравенства для гладких функций $u, \tilde{u}, \tilde{v}$. В этом случае, в соответствии с L^2 -двойственностью пространств H^{-1} и H_0^1 , норма пространства H^{-1} может быть явно выражена следующим образом:

$$\|\tilde{v}\|_{H^{-1}} := \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}=1} \int_{\Omega} \tilde{v} \varphi \, dx. \quad (3.3)$$

Теперь второе неравенство в (3.2) можно получить, исходя из следующей цепочки неравенств:

$$\left| \int_{\Omega} \gamma^0 \tilde{v} \varphi \, dx \right| \leq \|\tilde{v}\|_{H^{-1}} \|\gamma^0 \varphi\|_{H_0^1} \leq \|\tilde{v}\|_{H^{-1}} C(\|\gamma^0\|_{W^{1,n}} + \|\gamma^0\|_{L^\infty}) \|\varphi\|_{H_0^1} \quad (3.4)$$

для гладких $\tilde{v}$, φ и для γ^0 из пространства Соболева $W^{1,n} \cap L^\infty$; см. (1.21). Аналогично, первое неравенство в (1.42) следует из неравенств Гёльдера и Соболева:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} b^0 f'(u) \tilde{u} \varphi \, dx \right| &\leq \|b^0\|_{L^\infty} \|f'(u)\|_{L^n} \|\tilde{u}\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^{2n/(n-2)}} \\ &\leq \|b^0\|_{L^\infty} C(1 + \|u\|_{H_0^1}^{p-1}) \|\tilde{u}\|_{L^2} \|\varphi\|_{H_0^1} \\ &\leq C(1 + \|u\|_{H_0^1}^{p-1}) \|\tilde{u}\|_{L^2} \|\varphi\|_{H_0^1}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где через C обозначены различные абсолютные константы; см. также (2.2). Это доказывает неравенства (3.2) и, следовательно, неравенство (1.41).

Аналогично, неравенство (1.42) с $p_0 := p$ сводится к следующим трем:

$$\begin{aligned} \|(b^\varepsilon - b^0)f(u)\|_{H^{-1}} &\leq C(1 + \|u\|_{H_0^1}^p)\varepsilon, \\ \|g^\varepsilon - g^0\|_{H^{-1}} &\leq C\varepsilon, \\ \|(\gamma^\varepsilon - \gamma^0)v\|_{H^{-1}} &\leq C\|v\|_{H^{-1}}\varepsilon \end{aligned} \quad (3.6)$$

для гладких u , v и подходящих констант C . Последнее из этих трех неравенств легко следует из предположения (1.21):

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\gamma^\varepsilon - \gamma^0)v \varphi \, dx \right| &= \varepsilon \left| \int_{\Omega} \tilde{\gamma} v \varphi \, dx \right| \leq \varepsilon \|v\|_{H^{-1}} \|\tilde{\gamma} \varphi\|_{H_0^1} \\ &\leq C(\|\tilde{\gamma}\|_{W^{1,n}} + \|\tilde{\gamma}\|_{L^\infty}) \|v\|_{H^{-1}} \varepsilon \|\varphi\|_{H_0^1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Оба неравенства в (3.7) обосновываются аналогично неравенствам (3.4) с помощью предположения (1.21).

Для доказательства оставшихся двух неравенств в (3.6) мы воспользуемся дивергентными представлениями (1.16)–(1.19) для $b^\varepsilon - b^0$ и $g^\varepsilon - g^0$. Сначала рассмотрим

$$g^\varepsilon - g^0 = \sum_{i=1}^n \partial_{z_i} G_i(x, z) \Big|_{z=x/\varepsilon}. \quad (3.8)$$

По (1.17) мы можем оценить вторую разность в (3.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (g^\varepsilon - g^0) \varphi \, dx \right| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \varphi \partial_{z_i} G_i(x, x/\varepsilon) \, dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \varphi \cdot (\varepsilon \partial_{x_i} G_i(x, x/\varepsilon) - \varepsilon \partial_{x_i}^1 G_i(x, x/\varepsilon)) \, dx \right| \\ &\leq \varepsilon \left(\left| \int_{\Omega} G \nabla_x \varphi \, dx \right| + \sum_{i=1}^n \left| \int_{\Omega} \partial_{x_i}^1 G_i \varphi \, dx \right| \right) \\ &\leq \varepsilon \left(\|G\|_{L^2} \|\varphi\|_{H_0^1} + \sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i}^1 G_i\|_{L^{2n/(n+2)}} \|\varphi\|_{L^{2n/(n-2)}} \right) \\ &\leq C\varepsilon \|\varphi\|_{H_0^1}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь мы снова использовали неравенства Гёльдера, соболевское вложение $H_0^1 \hookrightarrow L^{2n/(n-2)}$ и обозначение $\partial_x^1 G(x, z)$ для частной производной G по первым x -компонентам, а также $\partial_{x_i} G$ для обозначения частной производной отображения $x \mapsto G(x, x/\varepsilon)$ по x_i . Второе неравенство в (3.6) доказано.

Для доказательства первого неравенства в (3.6) мы воспользуемся неравенствами (2.2), дивергентным представлением (1.18), (1.19) разности $b^\varepsilon - b^0$ и проделаем аналогичные рассуждения:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} (b^\varepsilon - b^0) f(u) \varphi \, dx \right| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \varphi \partial_{z_i} B_i(x, x/\varepsilon) f(u) \, dx \right| \\
&\leq \varepsilon \left(\left| \int_{\Omega} B \nabla_x (f(u) \varphi) \, dx \right| + \sum_{i=1}^n \left| \int_{\Omega} \partial_{x_i}^1 B_i \cdot f(u) \varphi \, dx \right| \right) \\
&\leq \varepsilon \left(\|B\|_{L^\infty} (\|f'(u)\|_{L^n} \|\nabla_x u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^{2n/(n-2)}} \right. \\
&\quad \left. + \|f(u)\|_{L^2} \|\nabla_x \varphi\|_{L^2} \right) + \sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i}^1 B_i\|_{L^n} \|f(u)\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^{2n/(n-2)}} \\
&\leq C\varepsilon (1 + \|u\|_{H_0^1}^p) \|\varphi\|_{H_0^1}. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Неравенства (3.6) и, следовательно, неравенство (1.42) доказаны.

Для удобства читателя мы завершим этот параграф несколькими замечаниями, которые связывают дивергентные представления (1.16)–(1.19) со стандартными диофантовыми условиями для случая квазипериодических коэффициентов $b^\varepsilon, g^\varepsilon$, см. также [7]. Мы укажем диофантово условие лишь для b , опустив аналогичное условие для g . Пусть справедливо соотношение

$$b(x, z) - b^0(x) = \beta(x, \omega_1 z_1, \dots, \omega_n z_n) \tag{3.11}$$

с частотными векторами $\omega_j \in \mathbb{R}^{\ell_j}$, где β – функция, достаточно гладкая по всем своим $n + \ell := n + \ell_1 + \dots + \ell_n$ аргументам и 2π -периодичная по всем аргументам кроме (быть может) переменной x .

Наложим стандартное диофантово условие КАМ-теории

$$|k_j \omega_j| \geq c |k_j|^{-(\ell_j - 1 + \delta)} \tag{3.12}$$

для $j = 1, \dots, n$, некоторых констант $c, \delta > 0$ и всех целочисленных векторов $k_j \in \mathbb{Z}^{\ell_j} \setminus \{0\}$. Напомним, что это условие выполняется на множестве полной лебеговой меры в пространстве частотных векторов $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^\ell$; см., например, [4]. В работе [8], исходя из разложения Фурье

$$\beta = \sum_k \beta_k(x) \exp \left(i \sum_j (k_j \omega_j) z_j \right), \tag{3.13}$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k_j \in \mathbb{Z}^{\ell_j}$, построено явное дивергентное представление $b^\varepsilon - b^0 = \sum \partial_{z_i} B_i$. Достаточное условие регулярности функции β в терминах коэффициентов Фурье β_k дается следующими двумя условиями:

$$\begin{aligned}
\sum |\beta_k|_{L^\infty} |k_j \omega_j|^{-1} &< \infty, \\
\sum |\partial_x^1 \beta_k|_{L^n} |k_j \omega_j|^{-1} &< \infty.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Здесь суммирование происходит по всем целочисленным векторам $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^\ell$ и $j = 1, \dots, n$, для которых $k_j \neq 0$. Ввиду диофантова условия (3.12), эти сходимости можно гарантировать, если потребовать алгебраическое убывание величин $|\beta_k|_{L^\infty}$, $|\partial_x^1 \beta_k|_{L^n}$ как

$$(1 + |k_j|)^{-(\ell_j - 1 + \delta)} (1 + |k|)^{-\ell + \delta'} \quad (3.15)$$

для некоторого $\delta' > 0$. Это условие обеспечивает (1.19), см. [7], [8].

В полной аналогии с (3.13), (3.14) условия на коэффициенты Фурье $\Gamma_k(x)$, соответствующие z -квазипериодическому члену $g = g(x, z)$, записываются как

$$\begin{aligned} \sum |\Gamma_k|_{L^2} |k_j \omega_j|^{-1} &< \infty, \\ \sum |\partial_x^1 \Gamma_k|_{L^{2n/(n+2)}} |k_j \omega_j|^{-1} &< \infty. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Условие алгебраического убывания (3.15) величин $|\Gamma_k|_{L^2}$ и $|\partial_x^1 \Gamma_k|_{L^{2n/(n+2)}}$ будет обеспечивать сходимость рядов.

Со сделанными выше замечаниями мы видим, как пространственно-квазипериодические коэффициенты, частоты которых удовлетворяют диофантову условию, при некотором дополнительном условии дают пример гиперболических волновых уравнений с осциллирующими коэффициентами, для которых справедливы наши теоремы.

§ 4. Доказательство теорем 1.3 и 1.1

В этом параграфе мы докажем теорему 1.3 о близости слабого решения $y^\varepsilon(t)$ уравнения $\frac{d}{dt} y^\varepsilon = Ay^\varepsilon + \mathcal{F}_\varepsilon(y^\varepsilon)$, где $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, к решению $y^0(t)$ предельного (усредненного) уравнения (с $\varepsilon = 0$) с общими начальными данными $y^\varepsilon(0) = y_0 \in E_0$. В конце параграфа мы докажем теорему 1.1.

Напомним, что мы рассматриваем слабые решения в смысле интегро-операторного соотношения (1.38). Для доказательства повторно экспоненциальной оценки теоремы 1.3 мы рассмотрим разность

$$w(t) = y^\varepsilon(t) - y^0(t), \quad (4.1)$$

где $y^0(t) \in E_0$ удовлетворяет тому же интегральному соотношению (1.38), но с $\varepsilon = 0$. Для разности $w(t)$ имеем $w(0) = 0$ и, кроме того,

$$w(t) = \int_0^t \exp(A(t - \tau)) (\mathcal{F}_\varepsilon(y^\varepsilon(\tau)) - \mathcal{F}_0(y^0(\tau))) d\tau \quad (4.2)$$

в E_0 . Чтобы получить повторно экспоненциальную оценку (1.43) порядка ε^α в промежуточном пространстве $E_{-\alpha}$, мы докажем неравенства

$$\|w(t)\|_0 \leq 2M \exp(\varrho_0 t), \quad (4.3)$$

$$\|w(t)\|_{-1} \leq (\exp(\tilde{c}_2 \exp(\varrho t)) + \tilde{c}_1 t - 1) \varepsilon \quad (4.4)$$

с явными константами $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$, указанными ниже в (4.15). Из этих неравенств с помощью интерполяции (1.34) мы получим неравенство для нормы пространства $E_{-\alpha}$, что

докажет теорему 1.3, т.е. неравенство (1.43), с явно указанными в (1.44) постоянными c_0, c_1, c_2 . Заметим, что неравенство (4.4) чуть-чуть сильнее, чем (1.43), где опущен внеэкспоненциальный член -1 , который становится несущественным при больших временах.

Неравенство (4.3) является прямым следствием отдельных экспоненциальных оценок (1.39) для $y^\varepsilon(t)$ и $y^0(t)$ в E_0 . Это неравенство дает лишь оценку, без какой-либо информации о сходимости при $\varepsilon \searrow 0$.

Для доказательства неравенства (4.4) в E_{-1} мы применим лемму Гронуолла к соотношению (4.2). Для этого мы разобьем разность нелинейностей в подынтегральном выражении следующим образом:

$$\mathcal{F}_\varepsilon(y^\varepsilon) - \mathcal{F}_0(y^0) = (\mathcal{F}_\varepsilon(y^\varepsilon) - \mathcal{F}_0(y^\varepsilon)) + (\mathcal{F}_0(y^\varepsilon) - \mathcal{F}_0(y^0)). \quad (4.5)$$

Первая разность является величиной порядка ε в E_{-1} . В самом деле, используя условие (1.42) и экспоненциальную оценку (1.39) для $y^\varepsilon(t)$, получаем

$$\|\mathcal{F}_\varepsilon(y^\varepsilon(\tau)) - \mathcal{F}_0(y^\varepsilon(\tau))\|_{-1} \leq C(1 + M^{p_0} e^{\varrho_0 p_0 \tau})\varepsilon. \quad (4.6)$$

Аналогично, неравенство (1.41) дает

$$\|\mathcal{F}_0(y^\varepsilon(\tau)) - \mathcal{F}_0(y^0(\tau))\|_{-1} \leq C(1 + M^{p_1} e^{\varrho_0 p_1 \tau})\|w(\tau)\|_{-1}. \quad (4.7)$$

Обозначим $p = \max(p_0, p_1)$, $\varrho = \varrho_0 p$ и

$$c(\tau) := C(1 + M^p e^{\varrho \tau}). \quad (4.8)$$

Тогда разбиение (4.5) и оценки (4.6), (4.7) влекут следующее неравенство:

$$\|\mathcal{F}_\varepsilon(y^\varepsilon(\tau)) - \mathcal{F}_0(y^0(\tau))\|_{-1} \leq c(\tau)(\|w(\tau)\|_{-1} + \varepsilon). \quad (4.9)$$

Подставляя это неравенство в соотношение (4.2) и используя (1.35), получаем следующее неравенство гронуолловского типа:

$$\|w(t)\|_{-1} \leq \int_0^t M e^{\tilde{\varrho}_0(t-\tau)} c(\tau)(\|w(\tau)\|_{-1} + \varepsilon) d\tau. \quad (4.10)$$

Сведением к лемме Гронуолла мы сможем получить

$$\|w(t)\|_{-1} \leq C(t)\varepsilon. \quad (4.11)$$

Здесь мы использовали обозначение

$$C(t) = \exp\left(\int_0^t (\tilde{\varrho}_0 + M c(\tau)) d\tau\right) - 1, \quad (4.12)$$

где $c(\tau)$ определено экспоненциальным выражением (4.8). Мы также без ограничения общности предположили, что $\tilde{\varrho}_0 \geq 0$.

Для доказательства (4.11), (4.12) заметим, что функция

$$\xi(t) := (1 + \varepsilon^{-1}\|w(t)\|_{-1}) \exp(-\tilde{\varrho}_0 t) > 0$$

удовлетворяет $\xi(0) = 1$ и

$$\xi(t) \leq 1 + \int_0^t M c(\tau) \xi(\tau) d\tau \quad (4.13)$$

по (4.10). Теперь, используя лемму Гронуолла, мы получаем

$$\xi(t) \leq \exp\left(\int_0^t M c(\tau) d\tau\right),$$

что доказывает (4.11) с (4.12).

Прямое вычисление показывает, что

$$C(t) \leq \exp(\tilde{c}_2 e^{\varrho t} + \tilde{c}_1 t) - 1 \quad (4.14)$$

с константами $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$, данными явными формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= MC + \tilde{\varrho}_0, \\ \tilde{c}_2 &= \varrho^{-1} M^{p+1} C, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где $\varrho > 0$. Неравенства (4.11), (4.14) доказывают неравенство (4.4). Отметим консервативный и диссипативный случаи, для которых $\varrho_0 = \varrho = 0$ и функция $c(\tau)$ имеет вид $c(\tau) = C(1 + M^p)$. В этом случае (4.4) упрощается до

$$\|w(t)\|_{-1} \leq \exp(\tilde{c}_1^0 t) \varepsilon, \quad (4.16)$$

где

$$\tilde{c}_1^0 = MC(1 + M^p) + \tilde{\varrho}_0. \quad (4.17)$$

С помощью интерполяции (1.34) неравенств (4.3) и (4.4), как было указано выше, получаем неравенство для нормы пространства $E_{-\alpha}$, что завершает доказательство теоремы 1.3, а также дополнения к этой теореме (1.46), (1.47).

Чтобы вывести теорему 1.1 из теоремы 1.3, мы должны проверить справедливость предположений теоремы 1.3 в конкретном случае (1.48), (1.49), соответствующем гиперболическому волновому уравнению (1.1), (1.2). Мы должны проверить условия (1.34), (1.35), (1.39)–(1.42) теоремы 1.3. Интерполяционное неравенство (1.34) справедливо в силу нашего выбора пространств $E_{-\alpha} = H^{1-\alpha} \times H^{-\alpha}$. Оценка роста (1.39) доказана в § 2. Экспоненциальная оценка (1.35) для полугруппы линейных операторов $\exp(At)$ в $\mathcal{L}(E_0)$ также следует из результатов § 2, если положить $f \equiv 0, g \equiv 0, \gamma \equiv 0$. Для пространства $\mathcal{L}(E_{-1})$ справедливо то же самое неравенство. Оно получается из предыдущего сопряжением с помощью изоморфизма $(-\Delta)^{-1/2}: E_0 \rightarrow E_{-1}$. Неравенства (1.42) и (1.41) были доказаны в § 3. Поэтому теорему 1.3 действительно можно применить, что доказывает повторно экспоненциальную оценку (1.22) теоремы 1.1.

В случае $\gamma^0 \geq \underline{\gamma} > 0$ строго положительной диссипации мы утверждали справедливость более сильного неравенства (1.23) с одной экспонентой. Чтобы доказать это, рассмотрим вариант теоремы 1.3 с $\varrho = \varrho_0 = 0$, (1.45), который дается неравенством (1.46) с (1.47). Априорная оценка $\|y^\varepsilon(t)\|_0 \leq M(y_0)$, предположенная в (1.45), выполняется при $\gamma^0 \geq \underline{\gamma} > 0$ и, более того, при $\gamma^\varepsilon \geq 0$; см. предположения (1.21) и замечания в конце § 2. (Аналогично получаем, что неравенство (1.35) для полугруппы $\exp(At)$, на самом деле, выполнено с нулевой скоростью роста $\tilde{\varrho}_0 = 0$.) Из (1.46) получаем оценку роста (1.23) с одной экспонентой, что завершает доказательство теоремы 1.1.

§ 5. Близость аттракторов к экспоненциальному

В этом параграфе мы сначала докажем близость глобальных аттракторов допредельных уравнений в промежуточных пространствах к глобальному аттрактору предельного уравнения в случае, когда последний является экспоненциально притягивающим, а именно, мы докажем неравенство (1.32), которое утверждается теоремой 1.2. Доказательство (см. лемму 5.1) основано на экспоненциальном притяжении решений при $\varepsilon = 0$ к глобальному аттрактору $\mathcal{A}^0$, которое отмечено в (1.31). Такой абстрактный подход был известен и ранее, см., например, [10], [7]. Затем мы применим результаты, полученные Бабиным и Вишиком [3], чтобы доказать требуемое экспоненциальное притяжение аттрактора $\mathcal{A}^0$ в случае гиперболического волнового уравнения (1.1) с крайними условиями (1.2) в пространстве $E_0 = H_0^1 \times L^2$. См. также [6].

Мы изложим доказательство неравенства (1.32) в абстрактной форме, следуя изложению в [7; лемма 4.1]. Пусть для каждого $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ задана полугруппа $y^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, действующая в банаховом пространстве $E_{-\alpha}$, причем для любого начального положения y_0 неравенство

$$\|y^\varepsilon(t) - y^0(t)\|_{-\alpha} \leq C\varepsilon^\alpha e^{\varrho t} \quad (5.1)$$

выполнено равномерно для всех $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $t \geq 0$. Константы C и ϱ могут зависеть от α и от нормы $\|y_0\|_0$ начального положения $y_0 = y^\varepsilon(0) = y^0(0)$, но не от ε . Мы сейчас не требуем выполнения интерполяционных неравенств для пространств $E_{-\alpha}$. Но мы предполагаем, что пространства $E_{-\alpha}$ являются расширением основного пространства $E_0 \subseteq E_{-\alpha}$ и, соответственно, что норма пространства E_0 , которой мы выше измеряли начальные данные, является более сильной, чем нормы в пространствах $E_{-\alpha}$.

Пусть $\mathcal{A}^\varepsilon$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, обозначает семейство *обратно инвариантных* подпространств в $E_0 \subseteq E_{-\alpha}$ в следующем смысле: для каждого $\tilde{y}_0 \in \mathcal{A}^\varepsilon$ и любого $t \geq 0$ существует некоторое начальное состояние $y_0 \in \mathcal{A}^\varepsilon$ такое, что для решения y^ε в E_0 с начальным состоянием $y^\varepsilon(0) = y_0$ выполнено $y^\varepsilon(t) = \tilde{y}_0$. Мы также предполагаем экспоненциальную скорость притяжения к $\mathcal{A}^0$ в $E_{-\alpha}$:

$$\text{dist}_{E_{-\alpha}}(y^0(t), \mathcal{A}^0) \leq Ce^{-\nu t} \quad (5.2)$$

равномерно по всем начальным положениям

$$y_0 \in \bigcup_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0} \mathcal{A}^\varepsilon \subseteq E_0 \subseteq E_{-\alpha}. \quad (5.3)$$

Наконец, мы предположим, что в пространстве $E_{-\alpha}$ условие (5.1) выполнено равномерно по всем начальным состояниям y_0 из объединения аттракторов (5.3). В силу того, что ранее мы уже предположили условие (5.1), достаточно предположить ограниченность множества $\bigcup \mathcal{A}^\varepsilon$ в основном пространстве E_0 с более сильной нормой $\|\cdot\|_0$.

ЛЕММА 5.1. *При сделанных выше предположениях (5.1) и (5.2) существует ε -независимая константа $C > 0$ такая, что неравенство (1.32) выполнено с показателем (1.33). Величины α , ϱ , ν введены выше в (5.1), (5.2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. [7]). Доказательство состоит в простом применении неравенства треугольника. Пусть $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1$. Для каждого пространства $\mathcal{A}^\varepsilon \subseteq E_0$ положим $t := -\nu^{-1}\alpha' \log \varepsilon > 0$. Согласно обратной инвариантности для каждого $\tilde{y}_0 \in \mathcal{A}^\varepsilon$ выберем $y_0 \in \mathcal{A}^\varepsilon$ такое, что $y^\varepsilon(t) = \tilde{y}_0$. Тогда неравенства (5.1), (5.2) и выбор t влекут

$$\begin{aligned} \text{dist}_{E_{-\alpha}}(\tilde{y}_0, \mathcal{A}^0) &= \text{dist}_{E_{-\alpha}}(y^\varepsilon(t), \mathcal{A}^0) \\ &\leq \|y^\varepsilon(t) - y^0(t)\|_{-\alpha} + \text{dist}_{E_{-\alpha}}(y^0(t), \mathcal{A}^0) \\ &\leq C(\varepsilon^\alpha e^{\varrho t} + e^{-\nu t}) = 2C\varepsilon^{\alpha'}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Лемма 5.1 доказана.

Пусть $\mathcal{A}^\varepsilon$ – глобальный аттрактор в пространстве $E_0 = H_0^1 \times L^2$ полугруппы $S^\varepsilon(t)$ решений $y^\varepsilon = (u^\varepsilon, u_t^\varepsilon) \in E_0$, соответствующей гиперболическому волновому уравнению (1.1), (1.2). Аналогично, пусть $\mathcal{A}^0$ – глобальный аттрактор разрешающей полугруппы $S^0(t)$ усредненного уравнения (1.14).

Для доказательства теоремы 1.2 нам осталось проверить справедливость предположений леммы 5.1 в случае (1.48), (1.49), соответствующем гиперболическому волновому уравнению (1.1), (1.2). Условие (5.1) доказано в теореме 1.1, (1.23); см. конец §4. Экспоненциальная скорость притяжения (5.2) будет установлена ниже, даже для более сильной нормы пространства E_0 .

Опишем необходимые для этого доводы. Более ранние и технически более ограничительные подходы можно найти в [17], [3], [6], [15], [5]. Используя топологию пространства $E_0 = H_0^1 \times L^2$, отметим и частично прокомментируем следующие факты:

- (i) непрерывность зависимости $y^0(t; y_0)$ от $(t, y_0) \in [0, \infty) \times E_0$;
- (ii) существование глобальных аттракторов $\mathcal{A}^\varepsilon$ и $\mathcal{A}^0$;
- (iii) предкомпактность множества $\bigcup_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0} \mathcal{A}^\varepsilon$ в E_0 ;
- (iv) липшицевость в E_0

$$\|y^1(t) - y^2(t)\|_0 \leq C e^{\tilde{\varrho} t} \|y_0^1 - y_0^2\|_0, \quad (5.5)$$

зависимости решений y^1, y^2 при $\varepsilon = 0$ от начальных данных y_0^1, y_0^2 в окрестности $\mathcal{V}(\mathcal{A}^0)$ аттрактора $\mathcal{A}^0$ (C и $\tilde{\varrho}$ зависят только от $\mathcal{V}(\mathcal{A}^0)$);

- (v) непрерывность убывания гамильтониана (энергии) Φ в E_0 , см. (1.27);
- (vi) конечность и гиперболичность стационарных решений при $\varepsilon = 0$;
- (vii) $C^{1+\theta}$ -зависимость по норме E_0 решений $y^0(t; y_0)$ при $\varepsilon = 0$ от начальных данных y_0 при $t = 0$ в окрестности указанных стационарных точек.

В [3] показано, что в совокупности свойства (i), (ii), (iv)–(vii) влекут экспоненциальную сходимость относительно компактных множеств K к глобальному аттрактору $\mathcal{A}^0$ при $\varepsilon = 0$ по норме E_0 . Но согласно свойству (iii), доказанному ниже, $K := \bigcup \mathcal{A}^\varepsilon$ является предкомпактным множеством. Это докажет свойство экспоненциального притяжения (5.2). Поэтому чтобы доказать теорему 1.2, достаточно убедиться в справедливости утверждений (i)–(vii), сформулированных выше.

Начнем с непрерывной зависимости решения $S^\varepsilon(t)y_0 = y^\varepsilon(t; y_0)$ от $(t, y_0) \in [0, \infty) \times E_0$, которая утверждается в (i). Это общий факт теории полулинейных уравнений (сформулированный здесь в обозначениях (1.48), (1.49), соответствующих нашему гиперболическому волновому уравнению), который следует из локальной

липпицевости абстрактной нелинейности $\mathcal{F}_\varepsilon(y)$ в E_0 ; см. (2.3) и, например, [16], [14], [3; теорема 7.1].

Теперь покажем существование (ii) и предкомпактность (iii) глобальных аттракторов. Полугруппы $S^\varepsilon(t)$ в E_0 обладают ε -независимым поглощающим множеством $\mathcal{B}$, которое компактно в E_0 . Таким множеством является шар достаточно большого радиуса R в E_σ , где $\sigma := 1 - \frac{1}{2}(p-1)(n-2) > 0$. При $n = 3$ см. [19; с. 204–206]. При $n \geq 3$ см. также [9], [11]. Доказательство в [19] переносится дословно на случай быстро осциллирующих коэффициентов $b(x, x/\varepsilon), g(x, x/\varepsilon)$, потому что в нем ни разу не производится дифференцирование по x . Поэтому глобальные аттракторы $\mathcal{A}^\varepsilon$ существуют при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Их объединение предкомпактно в E_0 , поскольку оно содержится в ε -независимом множестве $\mathcal{B}$, которое компактно в E_0 . Это доказывает свойства (ii), (iii).

Свойство (iv) следует из равномерной ограниченности в E_0 решений с начальными данными в $\mathcal{V}(\mathcal{A}^0)$. Доказательство использует оценку роста (1.8) производной $f'(u)$ и проводится методами §2.

Свойство непрерывности (v) гамильтониана Φ следует из оценки роста (1.8), проинтегрированной дважды по u , и соболевского вложения $H_0^1 \hookrightarrow L^{2n/(n-2)}$.

Свойство (vi) уже предположено в теореме 1.2.

Условие Гёльдера (1.26) на $f'(u)$ влечет соответствующее свойство гёльдеровости для абстрактной нелинейности $\mathcal{F}(u)$ по норме E_0 и, следовательно, обеспечивает свойство гёльдеровости соответствующей полугруппы, которое утверждается в (vii).

Это завершает доказательство свойств (i)–(vii).

Подытожим наше доказательство теоремы 1.2 об оценках сходимости глобальных аттракторов $\mathcal{A}^\varepsilon$ диссипативного гиперболического волнового уравнения (1.1) с краевыми условиями (1.2). Согласно [3] свойства (i)–(vii) влекут равномерную по ε экспоненциальную скорость сходимости

$$\text{dist}_{H_0^1 \times L^2} \left(S^0(t) \left(\bigcup_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon} \mathcal{A}^\varepsilon \right), \mathcal{A}^0 \right) \leq C e^{-\nu t} \quad (5.6)$$

для предельной полугруппы $S^0(t)$, с подходящими константами $C, \nu > 0$. Это доказывает, что выполнено условие (5.2) леммы 5.1. Напомним, что условие (5.1) леммы 5.1 следует из теоремы 1.1 (см. (1.23)). В терминах $(u, u_t) = y \in E_{-\alpha} = H^{1-\alpha} \times H^{-\alpha}$ оно означает

$$\|u^\varepsilon(t, \cdot) - u^0(t, \cdot)\|_{H^{1-\alpha}} + \|u_t^\varepsilon(t, \cdot) - u_t^0(t, \cdot)\|_{H^{-\alpha}} \leq C \varepsilon^\alpha e^{\varrho t} \quad (5.7)$$

для всех $0 \leq \alpha \leq 1$ и подходящих констант $C, \varrho > 0$. Оба условия леммы требуют положительности диссипативного коэффициента. Из леммы 5.1 теперь следует неравенство

$$\text{dist}_{H^{1-\alpha} \times H^{-\alpha}}(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0) \leq C e^{\alpha'} \quad (5.8)$$

для подходящей константы C и $\alpha' := \alpha/(1 + \varrho/\nu)$. Теорема 1.2 доказана, поскольку (5.8) эквивалентно (1.32).

В качестве заключения мы упомянем открытую проблему оценок сходимости аттракторов в случае предельного показателя

$$p = n/(n-2), \quad (5.9)$$

который включает случай $p = 3$ кубической нелинейности f , когда размерность пространства равна $n = 3$. Известно, что в предельном случае глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$, а также отдельно каждый из аттракторов $\mathcal{A}^\varepsilon$ остаются компактными в E_0 , см. [3], [1] и [15]. Но, поскольку свойство (iii) предкомпактности множества

$$\bigcup_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0} \mathcal{A}^\varepsilon \quad (5.10)$$

в E_0 не известно, представленное нами доказательство не покрывает случай предельного показателя p .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Arrieta, A. N. Carvalho, J. K. Hale. A damped hyperbolic equation with critical exponent // Comm. Partial Differential Equations. 1992. V. 17. № 5/6. P. 841–866.
- [2] A. V. Babin, M. I. Vishik. Regular attractors of semigroups and evolution equations // J. Math. Pures Appl. (9). 1983. V. 62. № 4. P. 441–491.
- [3] А. В. Бабин, М. И. Вишик. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
- [4] J. W. S. Cassels. An Introduction to Diophantine Approximation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1957. (Cambridge Tracts in Math. Math. Phys. № 45.)
- [5] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik. Attractors for Equations of Mathematical Physics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. V. 49.)
- [6] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko, R. Temam. Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equations. Chichester/Paris: Wiley/Masson, 1994. (Res. Appl. Math. V. 37.)
- [7] B. Fiedler, M. Vishik. Quantitative homogenization of global attractors for reaction-diffusion systems with rapidly oscillating terms // Preprint, 2000.
- [8] B. Fiedler, M. Vishik. Quantitative homogenization of analytic semigroups and reaction-diffusion equations with Diophantine spatial frequencies // Adv. Differential Equations. 2001. V. 6. № 11. P. 1377–1408.
- [9] J. Hale. Asymptotic behaviour and dynamics in infinite dimensions // Res. Notes Math. 1985. V. 132. P. 1–42.
- [10] J. K. Hale, G. Raugel. Lower semicontinuity of attractors of gradient systems and applications // Ann. Mat. Pura Appl. 1989. V. 154. P. 281–326.
- [11] A. Haraux. Two remarks on hyperbolic dissipative problems // Res. Notes Math. 1985. V. 122. P. 161–179.
- [12] D. Henry. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. New York: Springer-Verlag, 1981. (Lecture Notes in Math. V. 840.)
- [13] T. Kato. Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin: Springer-Verlag, 1966. (Grundlehren Math. Wiss. V. 132.)
- [14] A. Pazy. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1983. (Appl. Math. Sci. V. 44.)
- [15] G. Raugel. Global attractors of partial differential equations // Handbook of Dynamical Systems / ed. B. Fiedler. V. 2. Amsterdam: Elsevier, 2002.
- [16] H. Tanabe. Equations of Evolution. London: Pitman, 1979.
- [17] R. Temam. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer-Verlag, 1988. (Appl. Math. Sci. V. 68.)