Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Клепцына, А. Л. Пятницкий, Усреднение случайной нестационарной задачи конвекции-диффузии, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 95–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm535>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:30:54

УДК 517.9

УСРЕДНЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ
ЗАДАЧИ КОНВЕКЦИИ-ДИФфуЗИИ

М. Л. Клепцына, А. Л. Пятницкий

Рассматривается задача усреднения для нестационарного уравнения типа конвекции-диффузии с быстроосциллирующими коэффициентами, периодическими по пространственным переменным и случайными стационарными по времени. В предположении, что коэффициенты уравнения обладают достаточно хорошими свойствами перемешивания, показано, что в правильно выбранных движущихся координатах распределение решения исходного уравнения сходится к решению предельного стохастического уравнения в частных производных. При этом усредненная задача корректна и определяет предельную меру однозначно.

Библиография: 25 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	95
§ 2. Постановка задачи	97
§ 3. Слабая компактность	99
§ 4. Предельный переход	109
§ 5. Операторы с диффузионными коэффициентами	115
Список литературы	117

§ 1. Введение

В работе изучается задача усреднения нестационарного уравнения типа конвекции-диффузии с быстроосциллирующими коэффициентами, которые периодичны по пространственным переменным и случайны по времени. Будем предполагать, что зависимость коэффициентов от времени сводится к зависимости от стационарного случайного процесса ξ , со значениями в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Соответствующая задача Коши принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} u^\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{\frac{t}{\varepsilon^2}} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} u^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} b_i \left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{\frac{t}{\varepsilon^2}} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} u^\varepsilon = 0, \quad (1)$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = u_0(x),$$

и мы будем исследовать предельное поведение ее решений u^ε , когда $\varepsilon \downarrow 0$.

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант № 99-559) и РФФИ (грант № 00-01-22000).

Ранее близкие задачи для параболических уравнений с симметрической эллиптической частью и с диффузионным процессом ξ , были рассмотрены в работах [7] и [13]. В [13] было показано, что для операторов в дивергентной форме справедлив классический результат теории усреднения, т.е. решения задачи Коши или начально-краевой задачи для исходного уравнения сходятся почти наверное (п.н.) при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению соответствующей задачи для усредненного параболического уравнения с постоянными неслучайными коэффициентами.

Картина предельного поведения решений существенно меняется в присутствии растущего члена нулевого порядка, см. [7]. В этом случае предельная динамика остается, вообще говоря, случайной и результат об усреднении справедлив в ослабленной форме. А именно, семейство вероятностных мер, порожденных распределением решений исходной задачи в подходящем функциональном пространстве, сходится слабо при $\varepsilon \rightarrow 0$ к мере, являющейся решением предельной мартингальной проблемы.

Задачи усреднения для различных эллиптических и стационарных параболических операторов с младшими членами рассматривались в работах [14], [15], [24], [19], [21]. Особое внимание в литературе было уделено операторам с несжимаемым векторным полем, здесь мы укажем работы [2], [3], [9], [10], [25].

В работе [11] изучались нестационарные параболические уравнения типа конвекции-диффузии с коэффициентами, периодическими как по пространственным переменным, так и по времени, причем результат об усреднении был получен в предположении, что осцилляция по времени “медленнее”, чем по пространству.

Основные концепции и методы теории усреднения изложены, например, в книгах [4] и [12].

Как и в неслучайной модели, при изучении задачи (1) необходимо принимать во внимание растущую как $1/\varepsilon$ конвекцию, которая присутствует в асимптотике решения u^ε . В связи с этим результат об усреднении задачи (1) будет получен в движущихся координатах $x' = x - \bar{b}t/\varepsilon$ с некоторым постоянным вектором $\bar{b}$. Такая замена переменных позволяет избавиться от растущего поля скоростей (порядка $1/\varepsilon$) в эффективной динамике.

В данной работе мы покажем, что семейство мер, определяемых законом распределения решения задачи (1), слабо сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению предельной мартингальной проблемы в энергетическом функциональном пространстве. При этом диффузия, появляющаяся в предельном уравнении, конечномерна и имеет коэффициент вида $\Lambda \nabla u$, где $\Lambda = \{\Lambda^{ij}\}$ – постоянная матрица, а оператор переноса представляет собой эллиптический оператор второго порядка с постоянными коэффициентами. Матрица Λ заслуживает особого внимания, поскольку в случае диффузионного процесса ξ_s ее не удастся построить с помощью решения обычной “локальной” задачи на ячейке с использованием генератора процесса ξ_s и для ее построения требуется более сложный анализ.

В статье мы построим несколько корректоров, являющихся решениями вспомогательных уравнений в частных производных, докажем априорные оценки и будем затем комбинировать это с идеями, развитыми в [23], [6]. Следует отметить, что некоторые из корректоров, построенных в работе, зависят не только от значения процесса ξ_s в текущий момент времени, но и от всего “будущего” этого процесса, что составляет существенную разницу с методами, применяемыми в [7], [13], [6], где была использована диффузионная природа корректоров.

В § 2 мы даем полную постановку задачи и формулируем все условия на коэффициенты и процесс ξ_s .

Цель § 3 — доказательство слабой компактности семейства распределений решений исходной задачи.

В § 4 мы выполняем предельный переход, строим коэффициенты предельной мартингальной проблемы и далее, благодаря единственности решения предельной задачи, обосновываем сходимость распределений u^ε .

Последний параграф посвящен частному случаю, когда процесс ξ_s является диффузионным.

§ 2. Постановка задачи

Мы изучаем асимптотическое поведение при малых $\varepsilon > 0$ решений следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u^\varepsilon(x, t) - \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{\frac{t}{\varepsilon^2}} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} u^\varepsilon(x, t) - \frac{1}{\varepsilon} b_i \left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{\frac{t}{\varepsilon^2}} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} u^\varepsilon(x, t) &= 0, \\ u^\varepsilon(x, 0) &= u_0(x); \end{aligned} \quad (2)$$

здесь ξ_s — это эргодический стационарный случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Символом $\mathbf{E}$ будет обозначаться математическое ожидание. В случае, когда ξ_s диффузионный процесс, будем обозначать через L его инфинитезимальный генератор:

$$L = q_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j} + B_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Другие условия на процесс ξ_s будут заданы в терминах коэффициентов равномерно или сильного перемешивания либо коэффициента максимальной корреляции. Для удобства читателя мы здесь даем соответствующие определения.

Пусть $\mathcal{F}_{\leq t}$ и $\mathcal{F}_{\geq t}$ — это σ -алгебры $\sigma(\xi_s, s \leq t)$ и $\sigma(\xi_s, s \geq t)$ соответственно. Функция $\alpha(s)$, $s \geq 0$, задаваемая соотношением

$$\alpha(s) = \sup_{\mathcal{B}_1 \in \mathcal{F}_{\leq 0}, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{F}_{\geq s}} |\mathbf{P}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) - \mathbf{P}(\mathcal{B}_1)\mathbf{P}(\mathcal{B}_2)|,$$

называется коэффициентом сильного перемешивания процесса $\{\xi_s\}$. Функция $\phi(s)$, $s \geq 0$,

$$\phi(s) = \sup_{\mathcal{B}_1 \in \mathcal{F}_{\leq 0}, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{F}_{\geq s}} |\mathbf{P}(\mathcal{B}_1 \mid \mathcal{B}_2) - \mathbf{P}(\mathcal{B}_1)|$$

называется коэффициентом равномерного перемешивания $\{\xi_s\}$. Наконец, коэффициент максимальной корреляции $\rho(s)$, $s \geq 0$, определяется равенством

$$\rho(s) = \sup \frac{|\text{cov}(\eta_1, \eta_2)|}{\sqrt{\mathbf{E}(\eta_1 - \mathbf{E}(\eta_1))^2 \mathbf{E}(\eta_2 - \mathbf{E}(\eta_2))^2}},$$

в котором $\sup$ берется по всем $\mathcal{F}_{\leq 0}$ -измеримым η_1 и $\mathcal{F}_{\geq s}$ -измеримым η_2 таким, что $E(\eta_1)^2 < \infty$ и $E(\eta_2)^2 < \infty$; обозначение cov используется для ковариации.

Мы всегда предполагаем, что коэффициенты $a_{ij}(z, y)$ и $b_i(z, y)$ периодичны по переменной z . Остальные предположения сформулированы ниже.

A1. Функции $a_{ij}(z, y)$ и $b_i(z, y)$ и их первые производные по z и y равномерно ограничены:

$$|a_{ij}(z, y)| + |\nabla_z a_{ij}(z, y)| + |\nabla_y a_{ij}(z, y)| \leq c, \\ |b_i(z, y)| + |\nabla_z b_i(z, y)| + |\nabla_y b_i(z, y)| \leq c;$$

здесь и далее символом c обозначаются положительные константы.

A2. Матрица $a_{ij}(z, y)$ положительно определена:

$$a_{ij}\eta_i\eta_j \geq c|\eta|^2, \quad \eta \in \mathbb{R}^n,$$

для некоторого $c > 0$ при всех $(z, y) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^d$.

A3. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$\int_0^\infty (\alpha(s))^{1/2} ds < \infty; \quad \int_0^\infty (\phi(s))^{1/2} ds < \infty; \quad \int_0^\infty \rho(s) ds < \infty.$$

В частном случае, когда процесс ξ_s диффузионный, возникает естественное желание заменить предположение **A3** некоторым его эффективно проверяемым достаточным условием, формулируемым в терминах коэффициентов генератора процесса. Однако, как оказалось, существенно удобнее использовать для этой цели не генератор исходного процесса ξ_s , а генератор процесса с обращенным временем $\zeta_s = \xi_{-s}$. В связи с этим мы вводим обозначение $\tilde{L}$ для генератора ζ_s ,

$$\tilde{L} = \tilde{q}_{kl}(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_l} + \tilde{B}_k(y) \frac{\partial}{\partial y_k},$$

и предполагаем, что вместо **A3** выполнено следующее условие.

A3'. Коэффициенты диффузии $\tilde{q}_{kl}(y)$ и их производные первого порядка равномерно ограничены:

$$|\tilde{q}_{kl}(y)| + |\nabla_y \tilde{q}_{kl}(y)| \leq c;$$

оператор $\tilde{L}$ равномерно эллиптичен:

$$\tilde{q}_{kl}\eta_k\eta_l \geq c|\eta|^2, \quad \eta \in \mathbb{R}^d,$$

при всех $y \in \mathbb{R}^d$. Вектор-функция $\tilde{B}(y)$ допускает полиномиальную оценку

$$|\tilde{B}(y)| + |\nabla \tilde{B}(y)| \leq c(1 + |y|^\kappa)$$

с некоторым $\kappa > 0$ и, кроме того, существуют такие $\mu > -1$, $R > 0$ и $c > 0$, что при всех y из $\{y : |y| \geq R\}$ выполнено неравенство

$$\frac{\tilde{B}(y) \cdot y}{|y|} \leq -c|y|^\mu.$$

Согласно [20] (см. также [7]) при выполнении условия **A3'** процесс ζ_s (а следовательно, и ξ_s) обладает единственной инвариантной мерой, причем эта мера имеет непрерывную плотность $\rho(y)$, удовлетворяющую уравнению

$$\tilde{L}^* \rho = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y) dy = 1,$$

и убывающую на бесконечности быстрее любой отрицательной степени $|y|$; обозначение $\tilde{L}^*$ здесь использовано для сопряженного с $\tilde{L}$ оператора. К тому же для стационарной версии процесса ζ_s с генератором $\tilde{L}$ коэффициент сильного перемешивания $\alpha(s)$ убывает на бесконечности быстрее любой отрицательной степени s , что влечет условие **A3**.

Далее, распределение стационарного процесса $\xi_s = \zeta_{-s}$ в пространстве траекторий совпадает с распределением стационарного диффузионного процесса с генератором

$$L = (\rho(y))^{-1} \tilde{L}^* (\rho(y) \cdot) = \tilde{q}_{kl}(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_l} + \left((\rho(y))^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} [\rho(y) \tilde{q}_{ki}(y)] - \tilde{B}_k(y) \right) \frac{\partial}{\partial y_k};$$

в дальнейшем мы отождествляем эти процессы.

В предположениях **A1**–**A3** при каждом начальном условии $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и каждом $\varepsilon > 0$ задача (2) имеет почти неверное (п.н.) единственное решение

$$u^\varepsilon \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^n)) \cup C(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Распределение этого решения порождает вероятностную меру Радона в пространстве

$$V = L_w^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^n)) \cup C(0, T; L_w^2(\mathbb{R}^n))$$

с борелевской σ -алгеброй, символ w здесь указывает на слабую топологию. Эта мера, определяемая как распределение u^ε в V , будет обозначаться Q^ε .

§ 3. Слабая компактность

В этом параграфе мы устанавливаем результаты о компактности для семейства мер Q^ε . В общем случае само это семейство мер не является слабо компактным в V . Для того чтобы получить компактное семейство, мы вводим движущуюся систему координат $(x', t) = (x - \bar{b}/\varepsilon, t)$ с постоянным вектором $\bar{b}$ и показываем, что при правильном выборе $\bar{b}$ семейство распределений функций $u^\varepsilon(x', t)$ будет слабо компактным в V . Этот результат опирается на априорные оценки для решения задачи (2) и теорему Прохорова (см. [23], [6]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Равномерно по $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\sup_{t \leq T} \left(\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds \right) \leq c \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (3)$$

Существует постоянный вектор $\bar{b}$ такой, что для любых $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\gamma > 0$ имеем

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \sup_{\varepsilon > 0} \mathbf{P} \left\{ \sup_{|t-s| < \nu} \left| \left(u^\varepsilon(t), \varphi \left(\cdot + \frac{\bar{b}}{\varepsilon} t \right) \right) - \left(u^\varepsilon(s), \varphi \left(\cdot + \frac{\bar{b}}{\varepsilon} s \right) \right) \right| \geq \gamma \right\} = 0. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} p_\varepsilon(z, s) + A^* p_\varepsilon(z, s) &= 0, \quad (z, t) \in \mathbb{T}^n \times (-\infty, (T+1)/\varepsilon^2), \\ p_\varepsilon|_{s=(T+1)/\varepsilon^2} &= 1, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$A^* = \frac{\partial}{\partial z_i} a^{ij}(z, \xi_s) \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial z_i} (b^i(z, \xi_s) \cdot). \quad (6)$$

По принципу максимума (см. [16]) решение $p_\varepsilon(z, s)$ строго положительно. Более того, учитывая структуру уравнения и интегрируя по частям на множестве $\mathbb{T}^n \times (s, (T+1)/\varepsilon^2)$, получим

$$\int_{\mathbb{T}^n} p_\varepsilon(z, s) dz = 1$$

при всех $s \leq (T+1)/\varepsilon^2$. С помощью неравенства Гарнака (см. [22]) имеем

$$0 < c_1 \leq p_\varepsilon(z, s) \leq c_2 < \infty, \quad (7)$$

причем константы c_1 и c_2 не зависят от ε и от траектории ξ_s .

Если теперь умножить уравнение (2) на $p_\varepsilon(x/\varepsilon, s/\varepsilon^2)u^\varepsilon(x, s)$ и проинтегрировать результат по множеству $\mathbb{R}^n \times (0, t)$, то после простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (u^\varepsilon(x, t))^2 p_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\right) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x, t))^2 p_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, 0\right) dx \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{s/\varepsilon^2}\right) p_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon^2}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} u^\varepsilon(x, s) \frac{\partial}{\partial x_j} u^\varepsilon(x, s) dx ds \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (u^\varepsilon)^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} p_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{s/\varepsilon^2}\right) p_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon^2}\right) \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_i\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{s/\varepsilon^2}\right) p_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon^2}\right) \right) \right] dx ds = 0. \end{aligned}$$

Согласно (5) последний интеграл здесь равен 0, поэтому с учетом (7) легко выводим (3).

Переходим теперь к (4). Ключевым здесь является следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть начальное условие $u_0(x)$ в (2) есть функция класса C_0^∞ . Тогда существует неслучайная функция $\kappa_1(\varepsilon)$, стремящаяся к нулю при $\varepsilon \downarrow 0$, такая, что

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)} \operatorname{osc}_x u^\varepsilon \leq \kappa_1(\varepsilon); \quad (8)$$

здесь $G_x^\varepsilon = x + (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную периодическую задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} v(z, s) - Av(z, s) &= 0, \quad z \in \mathbb{T}^n, \quad s > s_0, \\ v|_{s=s_0} &= v_0 \end{aligned}$$

с оператором

$$A = \frac{\partial}{\partial z_i} a^{ij}(z, \xi_s) \frac{\partial}{\partial z_j} + b^i(z, \xi_s) \frac{\partial}{\partial z_i}. \quad (9)$$

Ее решение $v(z, s)$ сходится с экспоненциальной скоростью к константе при $s - s_0 \rightarrow \infty$. В частности,

$$\operatorname{osc}_{\mathbb{T}^n} v(\cdot, s_0 + \varepsilon^{-1/2}) \leq c' \exp(-c\varepsilon^{-1/2}) |v_0|_{L^\infty}, \quad (10)$$

причем c' и c не зависят от s_0 и от реализации ξ . Действительно, в предположениях **A1** и **A2** решение $v(z, s)$ удовлетворяет равномерному неравенству Гарнака, которое, в свою очередь, обеспечивает требуемую оценку (см., например, доказательство леммы 2 ниже).

Оператор

$$A^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{\frac{t}{\varepsilon^2}} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} b_i \left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{\frac{t}{\varepsilon^2}} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

коммутирует с любым сдвигом вида $S_k u(x) = u(x + \varepsilon k)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, поэтому с помощью принципа максимума имеем

$$|u^\varepsilon(x + \varepsilon k, t) - u^\varepsilon(x, t)| \leq M\varepsilon |k|, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad (11)$$

где $M = \max_x |\nabla u_0(x)|$.

Далее, мы выбираем произвольные $t_0 \geq 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$, сужаем функцию $u^\varepsilon(x, t_0)$ на $G_{x_0}^\varepsilon$ и обозначаем через $\tilde{v}_0^\varepsilon$ периодическое продолжение этого сужения с периодом ε по всем координатным направлениям. Благодаря (11) при всех x таких, что $|x - x_0| \leq \varepsilon^{1/4}$, справедлива оценка

$$|\tilde{v}_0^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(x, t_0)| \leq M\varepsilon^{1/4}. \quad (12)$$

Пусть $p(t, t', x, x')$ — это фундаментальное решение задачи (2). Согласно [1] в предположениях **A1–A2** для всех x, x' таких, что $|x - x'| > \varepsilon^{1/4}$, выполнено неравенство

$$p(t_0, t_0 + \varepsilon^{3/2}, x, x') \leq c' \exp(-c|x - x'|^2/\varepsilon^{3/2}), \quad (13)$$

в котором c и c' зависят только от констант из условий **A1–A2**. Интегрируя это неравенство на множестве $\{x : |x - x'| > \varepsilon^{1/4}\}$, найдем

$$\int_{|x - x'| > \varepsilon^{1/4}} p(t_0, t_0 + \varepsilon^{3/2}, x, x') dx \leq c\varepsilon. \quad (14)$$

Пусть $\tilde{v}^\varepsilon(x, t)$ – решение уравнения $\partial_t \tilde{v}^\varepsilon - A^\varepsilon \tilde{v}^\varepsilon = 0$ с начальным условием $\tilde{v}^\varepsilon|_{t=t_0} = \tilde{v}_0^\varepsilon(x)$. Тогда оценка (10) дает

$$\operatorname{osc}_{\mathbb{R}^n} \tilde{v}^\varepsilon(\cdot, t_0 + \varepsilon^{3/2}) \leq c' \exp(-c\varepsilon^{-1/2}) |\tilde{v}_0|_{L^\infty}.$$

С другой стороны, из (12) и (14) следует, что

$$|u^\varepsilon(x, t_0 + \varepsilon^{3/2}) - \tilde{v}^\varepsilon(x, t_0 + \varepsilon^{3/2})| \leq c\varepsilon |u_0|_{L^\infty} + cM\varepsilon^{1/4}$$

при всех $x \in G_{x_0}^\varepsilon$. Из последних двух неравенств вытекает требуемое утверждение при всех $t \geq \varepsilon^{3/2}$. Для малых t это утверждение является элементарным следствием оценки (14), что завершает доказательство леммы.

Далее нам понадобится последовательность задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} p^N(z, s) + A^* p^N(z, s) &= 0, \quad (z, s) \in \mathbb{T}^n \times (-\infty, N), \\ p^N(z, N) &= 1; \end{aligned} \quad (15)$$

с оператором A^* , заданным формулой (6). С помощью рассуждений, использованных выше, легко проверить, что функции p^N удовлетворяют равномерной по N и s , $-\infty < s \leq N$, оценке (7).

ЛЕММА 2. *Последовательность p^N сходится при $N \rightarrow \infty$ к стационарному эргодическому процессу со значениями в $C(\mathbb{T}^n)$, и реализации этого процесса удовлетворяют уравнению*

$$\frac{\partial}{\partial s} p + A^* p = 0, \quad \int_{\mathbb{T}^n} p(z, s) dz = 1, \quad s \in (-\infty, +\infty). \quad (16)$$

Справедлива оценка

$$\max_{\substack{z \in \mathbb{T}^n \\ k \leq s \leq k+1}} |p^N(z, s) - p(z, s)| \leq c_1 \exp(-c(N - k)) \quad (17)$$

с неслучайными константами $c > 0$ и $c_1 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для обоснования сходимости и оценки (17) рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial}{\partial s} q + A^* q = 0, \quad q|_{s=N} = q_0, \quad (18)$$

в которой $q_0 \in L^2(\mathbb{T}^n)$ удовлетворяет равенству

$$\int_{\mathbb{T}^n} q_0(z) dz = 0. \quad (19)$$

Покажем сначала, что для нашей цели достаточно проверить экспоненциальное затухание решения задачи (18) при $N - s \rightarrow \infty$, т.е. получить оценку

$$|q(z, s)| \leq c_1 \|q_0\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \exp(-c(N - s)). \quad (20)$$

Действительно, при всех $N > 0$ и $k > 0$ разность $p^{N+k} - p^N$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s}(p^{N+k} - p^N) + A^*(p^{N+k} - p^N) = 0, \quad s < N,$$

и при всех $s \leq N$ выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{T}^n} (p^{N+k}(z, s) - p^N(z, s)) dz = 0, \quad \|p^{N+k} - p^N\|_{L^\infty} \leq c.$$

Поэтому в предположении, что справедлива оценка (20), мы имеем

$$\|p^{N+k} - p^N\|_{C(\mathbb{T}^n \times [k, k+1])} \leq c_1 \exp(-c(N - k)).$$

По критерию Коши p^N сходится при $N \rightarrow \infty$ к предельной непрерывной функции, обозначаемой $p(z, s)$, и для этой функции выполнено (17). Переходя к пределу в (15), приходим к (16).

Для доказательства (20) рассмотрим сопряженную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \nu(z, s) - A\nu(z, s) &= 0, \quad (z, s) \in \mathbb{T}^n \times (s_0, +\infty), \\ \nu(z, s_0) &= \varphi(z), \end{aligned} \quad (21)$$

в которой φ — произвольная $L^2(\mathbb{T}^n)$ -функция. Умножив это уравнение на $q(z, s)$ и проинтегрировав его на множестве $\mathbb{T}^n \times [s_0, N]$, после нескольких интегрирований по частям, найдем

$$\int_{\mathbb{T}^n} \nu(z, N) q_0(z) dz = \int_{\mathbb{T}^n} \varphi(z) q(z, s_0) dz. \quad (22)$$

Далее, применяя оценку Нэша (см. [16]), получим

$$\max_{z \in \mathbb{T}^n} |\nu(z, s_0 + 1)| \leq c \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}. \quad (23)$$

Пусть $\nu^+(z, s_1)$ и $\nu^-(z, s_1)$ — это положительная и отрицательная части $\nu(z, s_1)$:

$$\nu^+(z, s_1) = \max(\nu(z, s_1), 0); \quad \nu^-(z, s_1) = -\min(\nu(z, s_1), 0).$$

Вычитая, если необходимо, подходящую константу, мы предполагаем без ограничения общности, что

$$\max_{z \in \mathbb{T}^n} \nu(z, s_1) = -\min_{z \in \mathbb{T}^n} \nu(z, s_1)$$

и, как следствие, $\|\nu^+(\cdot, s_1)\|_{L^\infty} = \|\nu^-(\cdot, s_1)\|_{L^\infty}$. Применяя неравенство Гарнака к решению задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \nu^1(z, s) - A\nu^1(z, s) &= 0, \quad (z, s) \in \mathbb{T}^n \times (s_1, +\infty), \\ \nu^1(z, s_1) &= \nu^+(z, s_1), \end{aligned}$$

получим оценку

$$\max_{z \in \mathbb{T}^n} \nu^1(z, s_1 + 1) \leq c_2 \min_{z \in \mathbb{T}^n} \nu^1(z, s_1 + 1)$$

с константой c_2 , зависящей только от постоянных из условий **A1** и **A2**. В совокупности с тривиальной оценкой

$$0 \leq \nu^1 \leq \|\nu^+(\cdot, s_1)\|_{L^\infty}$$

это дает

$$0 < c_3 \leq \nu^1(z, s_1 + 1) \leq \|\nu^+(\cdot, s_1)\|_{L^\infty}.$$

Аналогично, решение ν^2 задачи

$$\frac{\partial}{\partial s} \nu^2(z, s) - A \nu^2(z, s) = 0, \quad \nu^2(z, s_1) = \nu^-(z, s_1),$$

допускает оценку

$$0 < c_3 \leq \nu^2(z, s_1 + 1) \leq \|\nu^-(\cdot, s_1)\|_{L^\infty}.$$

В силу последних двух оценок найдется $c_4 > 0$ такая, что при всех $s > s_0 + 1$ выполнено неравенство

$$\operatorname{osc}_{\mathbb{T}^n} \nu(\cdot, s + 1) \leq (1 - c_4) \operatorname{osc}_{\mathbb{T}^n} \nu(\cdot, s). \quad (24)$$

Отсюда с учетом (23) выводим

$$\operatorname{osc}_{\mathbb{T}^n} \nu(\cdot, s) \leq c_1 \exp(-c(s - s_0)) \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}$$

для всех $s \geq s_0 + 1$. Наконец, из (22), (19) и последней оценки следует, что

$$\left| \int_{\mathbb{T}^n} \varphi(z) q(z, s_0) dz \right| = \left| \int_{\mathbb{T}^n} \nu(z, N) q_0(z) dz \right| \leq c_1 \exp(-c(N - s_0)) \|q_0\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}$$

при всех $\varphi \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Следовательно,

$$\|q(\cdot, s_0)\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \leq c_1 \exp(-c(N - s_0)) \|q_0\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}$$

и

$$|q(z, s_0)| \leq c_1 \exp(-c(N - s_0)) \|q_0\|_{L^2(\mathbb{T}^n)};$$

при выводе последнего неравенства снова была использована оценка Нэша.

Рассмотрим функции $\tilde{p}^N(z, s) = p^{N+s}(z, s)$, где p^N — это решение задачи (15). При каждом $N > 0$ функция $\tilde{p}^N$ определена при всех $s \in \mathbb{R}$ и представляет собой стационарный эргодический процесс со значениями в $C(\mathbb{T}^n)$. Как было доказано выше, при $N \rightarrow \infty$ последовательность $\tilde{p}^N(z, s)$ сходится с экспоненциальной скоростью к $p(z, s)$. Следовательно, $p(\cdot, s)$ также стационарный эргодический процесс. Лемма доказана.

Определим теперь следующий постоянный вектор:

$$\bar{b}^i = \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^n} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} a^{ij}(z, \xi_s) + b^i(z, \xi_s) \right) p(z, s) dz, \quad (25)$$

и стационарный случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}^n$:

$$\eta^i(s) = \int_{\mathbb{T}^n} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} a^{ij}(z, \xi_s) + b^i(z, \xi_s) - \bar{b}^i \right) p(z, s) dz. \quad (26)$$

Все процессы, участвующие в определении вектора $\bar{b}$, стационарны и эргодичны, поэтому по теореме Биркгофа имеем

$$\bar{b}^i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^n} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} a^{ij}(z, \xi_s) + b^i(z, \xi_s) \right) p(z, s) dz ds \quad (27)$$

для почти всех $\omega \in \Omega$.

ЛЕММА 3. *Для процесса $\eta(s)$ выполняется функциональная центральная предельная теорема (принцип инвариантности) с ковариационной матрицей*

$$\{\sigma^2\}^{ij} = \int_0^\infty \mathbb{E}(\eta^i(s)\eta^j(0) + \eta^i(0)\eta^j(s)) ds.$$

То есть

$$\varepsilon \int_0^{\cdot/\varepsilon^2} \eta(s) ds \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\mathcal{L}} \sigma w.$$

в $(C[0, T])^n$, где w — стандартное n -мерное броуновское движение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего мы хотим доказать, что при всех $T > 0$ выполняется неравенство

$$\|\mathbb{E}\{\eta_0 \mid \mathcal{F}_{\geq T}\}\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 (\exp(-cT) + \rho(T/2)) \quad (28)$$

с некоторыми константами $c > 0$ и $c_1 > 0$. Для этого на интервале $0 \leq s \leq T/2$ мы записываем функцию $p(z, s)$ в виде суммы $p(z, s) = p^1(z, s) + p^2(z, s)$, в которой каждое из слагаемых p^1 и p^2 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial s} p^i(z, s) + A^* p^i(z, s) = 0, \quad s < T/2,$$

с начальными условиями $p^1|_{s=T/2} = 1$ и $p^2|_{s=T/2} = p(z, T/2) - 1$. Тогда $\eta(0) = \eta^1(0) + \eta^2(0)$, где

$$\eta^{m,i}(0) = \int_{\mathbb{T}^n} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} a^{ij}(z, \xi_0) + b^i(z, \xi_0) \right) p^m(z, 0) dz, \quad m = 1, 2.$$

Из определения следует, что функция $p^1(0)$, а с ней и $\eta^1(0)$, измеримы относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{\leq T/2}$.

В силу условия перемешивания **A3** имеем

$$\|\mathbb{E}\{\eta^1(0) \mid \mathcal{F}_{\geq T}\}\|_{L^2(\Omega)} \leq \rho(T/2) \|\eta^1(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \rho(T/2). \quad (29)$$

Из (17) следует, что

$$|p^2(z, 0)| = |p(z, 0) - p^{T/2}(z, 0)| \leq c_1 \exp(-cT/2).$$

Следовательно,

$$\|\mathbb{E}\{\eta^2(0)|\mathcal{F}_{\geq T}\}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\eta^2(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \exp(-cT/2),$$

что вместе с (29) дает требуемую оценку (28).

Согласно [18; гл. 9] при выполнении условия **A3** неравенство (28) обеспечивает функциональную центральную предельную теорему (ЦПТ) для процесса $\eta(-s)$, что, в свою очередь, влечет функциональную ЦПТ для $\eta(s)$. Действительно, по теореме Прохорова (см. [5]) слабая компактность в $(C[0, T])^n$ семейства $\left\{ \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} \eta(s) ds \right\}$ является следствием слабой компактности $\left\{ \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} \eta(-s) ds \right\}$ и стационарности. Сходимость конечномерных распределений процесса $\left\{ \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} \eta(s) ds \right\}$ очевидным образом эквивалентна сходимости соответствующих конечномерных распределений $\left\{ \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} \eta(-s) ds \right\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение леммы было доказано в предположении, что выполнено последнее из неравенств в **A3**. Два других случая, когда имеет место равномерное или сильное перемешивание, рассматриваются аналогично.

Рассмотрим еще одну вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \psi^i(z, s) + A^* \psi^i(z, s) &= -\frac{\partial}{\partial z_j} (a^{ij}(z, \xi_s) p(z, s)) - a^{ij}(z, \xi_s) \frac{\partial}{\partial z_j} p(z, s) \\ &+ b^i(z, \xi_s) p(z, s) - \bar{b}^i p(z, s) - \eta^i(s) p(z, s), \quad (z, s) \in \mathbb{T}^n \times (-\infty, +\infty); \end{aligned} \quad (30)$$

здесь A^* задан формулой (6).

ЛЕММА 4. *Задача (30) имеет стационарное эргодическое решение. В условиях нормировки*

$$\int_{\mathbb{T}^n} \psi(z, s) dz = 0$$

такое решение является единственным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим для краткости правую часть в (30) через $F(z, s)$ и рассмотрим следующую последовательность задач Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \psi^N(z, s) + A^* \psi^N(z, s) &= \mathbf{1}_{\{N-1 < s \leq N\}} F(z, s), \quad (z, s) \in \mathbb{T}^n \times (-\infty, N), \\ \psi^N|_{s=N} &= 0; \end{aligned}$$

здесь $\mathbf{1}_{\{N-1 < s \leq N\}}$ обозначает индикаторную функцию интервала $(N-1, N)$.

Принимая во внимание равенство $\int_{\mathbb{T}^n} F(z, s) dz \equiv 0$, легко проверить, что

$$\int_{\mathbb{T}^n} \psi^N(z, s) dz = 0$$

при всех s ; для удобства мы доопределили ψ^N нулем при $s > N$. С помощью (20) получаем оценку

$$\|\psi^N\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n \times (k, k+1))} \leq c_1 \exp(-c(N-k))$$

при всех $k \leq N$. Суммируя ее по N , $-\infty < N < +\infty$, мы приходим к стационарному решению $\psi = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \psi^N$ задачи (30). При этом

$$\|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n \times (-\infty, +\infty))} \leq C \quad (31)$$

с некоторой неслучайной постоянной C . Единственность и эргодичность могут теперь быть доказаны так же, как в лемме 2.

Для того чтобы завершить доказательство компактности распределений $\{u^\varepsilon\}$, рассмотрим для произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ следующее выражение:

$$(\tilde{u}^\varepsilon, \tilde{p}^\varepsilon \varphi) + \varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon, \tilde{\psi}^\varepsilon \nabla_x \varphi),$$

в котором

$$\begin{aligned} \tilde{u}^\varepsilon(x, t) &= u^\varepsilon\left(x - \frac{1}{\varepsilon} \bar{b}t - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right) ds, t\right), \\ \tilde{p}^\varepsilon(x, t) &= p\left(\frac{x}{\varepsilon} - \varepsilon^{-2} \bar{b}t - \varepsilon^{-2} \int_0^t \eta\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right) ds, \frac{t}{\varepsilon^2}\right), \\ \tilde{\psi}^\varepsilon(x, t) &= \psi\left(\frac{x}{\varepsilon} - \varepsilon^{-2} \bar{b}t - \varepsilon^{-2} \int_0^t \eta\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right) ds, \frac{t}{\varepsilon^2}\right). \end{aligned}$$

Мы также будем использовать обозначения

$$\tilde{\varphi} = \varphi\left(x + \frac{1}{\varepsilon} \bar{b}t + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right) ds\right) \quad (32)$$

и, для произвольной функции r ,

$$\nabla_x^\varepsilon r(x) = \nabla_z r(z)|_{z=x/\varepsilon}, \quad \partial_t^\varepsilon r(t) = \frac{\partial}{\partial s} r(s) \Big|_{s=t/\varepsilon^2}.$$

С помощью уравнений (16) и (30), интегрируя по частям и выполняя простые преобразования, найдем

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[(\tilde{u}^\varepsilon, \tilde{p}^\varepsilon \varphi) + \varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon, \tilde{\psi}^\varepsilon \nabla_x \varphi)] &= \frac{d}{dt}[(u^\varepsilon, p^\varepsilon \tilde{\varphi}) + \varepsilon(u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \nabla_x \tilde{\varphi})] \\
&= (A^\varepsilon u^\varepsilon, p^\varepsilon \tilde{\varphi}) + \left(u^\varepsilon, \tilde{\varphi} \frac{\partial}{\partial t} p^\varepsilon\right) + \frac{1}{\varepsilon}(\bar{b} + \eta(t/\varepsilon^2)) \cdot (u^\varepsilon, p^\varepsilon \nabla_x \tilde{\varphi}) \\
&\quad + \varepsilon(A^\varepsilon u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \nabla_x \tilde{\varphi}) + \varepsilon\left(u^\varepsilon, \nabla_x \tilde{\varphi} \frac{\partial}{\partial t} \psi^\varepsilon\right) + (\bar{b} + \eta(t/\varepsilon^2)) \cdot (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \nabla_x \nabla_x \tilde{\varphi}) \\
&= (u^\varepsilon, p^\varepsilon a^\varepsilon \nabla_x \nabla_x \tilde{\varphi}) + (u^\varepsilon \nabla_x \nabla_x \tilde{\varphi}, [\nabla_x^\varepsilon(a\psi) + a^\varepsilon \nabla_x^\varepsilon \psi - b^\varepsilon \psi^\varepsilon + \bar{b} \psi^\varepsilon + \eta^\varepsilon \psi^\varepsilon]) \\
&\quad + \varepsilon(u^\varepsilon \psi^\varepsilon, a^\varepsilon \nabla_x \nabla_x \nabla_x \tilde{\varphi}).
\end{aligned} \tag{33}$$

С учетом (3) отсюда следует неравенство

$$|(\tilde{u}^\varepsilon(t), \tilde{p}^\varepsilon(t) \varphi) - (\tilde{u}^\varepsilon(s), \tilde{p}^\varepsilon(s) \varphi)| \leq c|t - s| \|\varphi\|_{C^3}. \tag{34}$$

Приближая, если необходимо, начальное условие $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ в задаче (1) последовательностью функций $u_0^m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и используя (3), мы всегда можем предполагать, что $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Тогда ввиду (34) и леммы 1 имеем

$$|(\tilde{u}^\varepsilon(t), \varphi) - (\tilde{u}^\varepsilon(s), \varphi)| \leq c|t - s| \|\varphi\|_{C^3} + c\kappa_1(\varepsilon) \|\varphi\|_{C^1}. \tag{35}$$

Обозначая

$$\hat{u}^\varepsilon(x, t) = u^\varepsilon(x - \varepsilon^{-1} \bar{b}t, t), \tag{36}$$

приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned}
&|(\hat{u}^\varepsilon(t), \varphi) - (\hat{u}^\varepsilon(s), \varphi)| \\
&= \left| \left(\hat{u}^\varepsilon(t), \varphi \left(\cdot - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta(\tau/\varepsilon^2) d\tau \right) \right) - \left(\hat{u}^\varepsilon(s), \varphi \left(\cdot - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \eta(\tau/\varepsilon^2) d\tau \right) \right) \right| \\
&\leq \left| \left(\hat{u}^\varepsilon(t), \varphi \left(\cdot - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \eta(\tau/\varepsilon^2) d\tau \right) \right) - \left(\hat{u}^\varepsilon(s), \varphi \left(\cdot - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \eta(\tau/\varepsilon^2) d\tau \right) \right) \right| \\
&\quad + \left| \left(\hat{u}^\varepsilon(t), \varphi \left(\cdot - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta(\tau/\varepsilon^2) d\tau \right) - \varphi \left(\cdot - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \eta(\tau/\varepsilon^2) d\tau \right) \right) \right| \\
&\leq c|t - s| \|\varphi\|_{C^3} + c\kappa(\varepsilon) \|\varphi\|_{C^1} + c\|\varphi\|_{C^1} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \eta(\tau/\varepsilon^2) d\tau \right|.
\end{aligned} \tag{37}$$

Для произвольной $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ первые два члена в правой части последней формулы стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $|t - s| \rightarrow 0$, равномерно по t, s и $\omega \in \Omega$. По лемме 3 интеграл $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta(\tau/\varepsilon^2) d\tau$ удовлетворяет функциональной ЦПТ в $(C[0, T])^n$ на любом интервале $[0, T]$. Поэтому, применяя дважды теорему Прохорова, мы убеждаемся в слабой компактности семейства распределений $(\hat{u}^\varepsilon, \varphi)$ в пространстве $C(0, T)$.

§ 4. Пределный переход

Цель этого параграфа – показать, что семейство функций $\{\tilde{u}^\varepsilon\}$ сходится почти наверное к решению задачи Коши для предельного параболического детерминированного уравнения с постоянными коэффициентами, а затем получить основные результаты о сходимости по распределению для семейства решений задачи (1). Сначала мы обоснуем сходимость в пространстве V , введенном в § 2, а затем покажем, что результат о сходимости остается справедливым в более сильной топологии.

Поскольку компактность семейства $\{\tilde{u}^\varepsilon\}$ уже доказана, то для того чтобы найти предельное распределение, достаточно перейти к пределу в выражениях вида $(\tilde{u}^\varepsilon, \varphi)$ с произвольной $\varphi \in C_0^\infty$.

Согласно (33) и лемме 1 получаем

$$\begin{aligned} & (\tilde{u}^\varepsilon(t), \varphi) - (u_0, \varphi) \\ &= (\tilde{u}^\varepsilon(t), p^\varepsilon(t)\varphi) + \varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon(t), \psi^\varepsilon(t)\nabla_x \varphi) - (u_0, p^\varepsilon(0)\varphi) - \varepsilon(u_0, \psi^\varepsilon(0)\nabla_x \varphi) + O(\varepsilon) \\ &= \int_0^t (u^\varepsilon(s), a^\varepsilon p^\varepsilon(s)\nabla_x \nabla_x \tilde{\varphi}) ds + \int_0^t (u^\varepsilon(s), a^\varepsilon \nabla_x^\varepsilon \psi^\varepsilon(s)\nabla_x \nabla_x \tilde{\varphi}) ds \\ &+ \int_0^t (u^\varepsilon(s), \nabla_x^\varepsilon (a^\varepsilon \psi^\varepsilon(s))\nabla_x \nabla_x \tilde{\varphi}) ds - \int_0^t (u^\varepsilon(s), b^\varepsilon \psi^\varepsilon(s)\nabla_x \nabla_x \tilde{\varphi}) ds \\ &+ \int_0^t (u^\varepsilon(s), \bar{b}\psi^\varepsilon(s)\nabla_x \nabla_x \tilde{\varphi}) ds + \int_0^t (u^\varepsilon(s), \eta^\varepsilon(s)\psi^\varepsilon(s)\nabla_x \nabla_x \tilde{\varphi}) ds + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (38)$$

Перейти к пределу в этом выражении нам поможет следующая лемма.

ЛЕММА 5. Пусть $\zeta(z, s)$ – стационарный эргодический процесс со значениями в $L^2(\mathbb{T}^n)$ ($C(\mathbb{T}^n)$) такой, что

$$\|\zeta\|_{L^2(\mathbb{T}^n \times (0,1))} \leq C$$

с неслучайной константой C . Тогда для всякой C_0^∞ -функции φ п.н. выполнено соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t (u^\varepsilon(s), \zeta^\varepsilon(s)\tilde{\varphi}) ds - \overline{\langle \zeta \rangle} \int_0^t (u^\varepsilon(s), \tilde{\varphi}) ds \right| = 0, \quad (39)$$

где

$$\overline{\langle \zeta \rangle} = \mathbf{E} \int_{\mathbb{T}^n} \zeta(z, s) dz$$

и $\tilde{\varphi}$ определена в (32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем предполагать, что $\overline{\langle \zeta \rangle} = 0$, и обозначим $\mu(s) = \int_{\mathbb{T}^n} \zeta(z, s) dz$. Тогда по лемме 1 имеем

$$\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t \left[(u^\varepsilon(\tau), \zeta^\varepsilon(\tau)\tilde{\varphi}) - \mu\left(\frac{\tau}{\varepsilon^2}\right)(u^\varepsilon(\tau), \tilde{\varphi}) \right] d\tau \right| \leq C\kappa_1(\varepsilon)$$

с неслучайной постоянной C . Таким образом, достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t \mu \left(\frac{\tau}{\varepsilon^2} \right) (u^\varepsilon(\tau), \tilde{\varphi}) d\tau \right| = 0. \quad (40)$$

Из (35) по теореме Арцела следует, что для каждой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ найдется такое компактное множество $K \subset C[0, T]$, что $(\tilde{u}^\varepsilon(\cdot), \varphi) \in K$ п.н. при всех $\varepsilon > 0$. Дальнейшее доказательство следует стандартной схеме. Мы строим конечную δ -сеть, состоящую из ступенчатых функций, и применяем теорему Биркгофа, чтобы доказать предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_0^t \mu \left(\frac{\tau}{\varepsilon^2} \right) (u^\varepsilon(\tau), \tilde{\varphi}) d\tau \right| = 0$$

для каждого $t \leq T$. В сочетании с простой оценкой

$$\left| \int_s^t \mu \left(\frac{\tau}{\varepsilon^2} \right) (u^\varepsilon(\tau), \tilde{\varphi}) d\tau \right| \leq c \left\| \mu \left(\frac{\cdot}{\varepsilon^2} \right) \right\|_{L^2(0, T)} |t - s|^{1/2}$$

это дает (40), что завершает доказательство леммы.

Будем обозначать $\bar{a}^{ij}$ “усредненную” матрицу, заданную формулой

$$\bar{a}^{ij} = \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^n} \left[a^{ij}(z, \xi_s) p(z, s) + a^{ik}(z, \xi_s) \frac{\partial}{\partial z_k} \psi^j(z, s) - b^i(z, \xi_s) \psi^j(z, s) \right] dz. \quad (41)$$

Это определение естественно, поскольку члены в правой части (38), не принимающие участия в определении $\bar{a}^{ij}$, удовлетворяют равенству

$$\int_{\mathbb{T}^n} \left(\frac{\partial}{\partial z_k} (a^{ik}(z, \xi_s) \psi^j(z, s)) + \bar{b}^i \psi^j(z, s) + \eta^i(s) \psi^j(z, s) \right) dz = 0.$$

По лемме 5 с учетом (38) и последнего равенства получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \leq T} \left| (\tilde{u}^\varepsilon(t), \varphi) - (u_0, \varphi) - \int_0^t (\tilde{u}^\varepsilon(s), \bar{a} \nabla_x \nabla_x \varphi) ds \right| = 0$$

п.н. для каждой $\varphi \in C_0^\infty$. Таким образом, для типичной реализации ξ . любая предельная точка семейства $\{\tilde{u}^\varepsilon\}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} u^0 - \bar{A} u^0 = 0, \quad u^0|_{t=0} = u_0, \quad (42)$$

с оператором $\bar{A} = \bar{a}^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$. Решение этой задачи единственно, поэтому семейство $\{\tilde{u}^\varepsilon\}$ п.н. сходится в V к функции u^0 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В действительности этот результат о сходимости может быть усилен. Мы покажем, что можно так выбрать стационарный эргодический процесс $\chi(z, s)$ со значениями в $C(\mathbb{T}^n)$, что функция

$$\begin{aligned} v^\varepsilon(x, t) \equiv & u^\varepsilon(x, t) - u^0\left(x + \bar{b}\frac{t}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon^2}\right) d\tau, t\right) \\ & - \varepsilon \nabla_x u^0\left(x + \bar{b}\frac{t}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon^2}\right) d\tau, t\right) \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\right) \end{aligned} \quad (43)$$

сходится к нулю п.н. в норме пространства $L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T]) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^n))$. Для этого подставим выражение (43) в исходное уравнение, сгруппируем члены с одинаковыми степенями ε и приравняем к нулю каждое из полученных выражений. Первое уравнение в этой цепочке порождается членами порядка ε^{-1} , оно имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial s} \chi(z, s) - A \chi(z, s) \right) \Big|_{z=\frac{x}{\varepsilon}, s=\frac{t}{\varepsilon^2}} \nabla_x u_\varepsilon^0(x, t) \\ & = [\nabla_z a(z, \xi_s) + b(z, \xi_s) - \bar{b} - \eta(s)] \Big|_{z=\frac{x}{\varepsilon}, s=\frac{t}{\varepsilon^2}} \nabla_x u_\varepsilon^0(x, t); \end{aligned}$$

здесь и далее мы обозначаем

$$u_\varepsilon^0(x, t) = u^0\left(x + \bar{b}\frac{t}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon^2}\right) d\tau, t\right).$$

Поэтому мы хотим выбрать функцию $\chi(z, s)$ как решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s} \chi^j(z, s) - A \chi^j(z, s) = \nabla_{z_i} a^{ij}(z, \xi_s) + b^j(z, \xi_s) - \bar{b}^j - \eta^j(s). \quad (44)$$

Изучим подробнее это уравнение. Умножив его на $p(z, s)$, проинтегрировав в цилиндре $\mathbb{T}^n \times [s_1, s_2]$ и вспомнив определения $p(z, s)$, $\bar{b}$ и $\eta(s)$, легко получить равенство

$$\int_{\mathbb{T}^n} \chi(z, s) p(z, s) dz = \text{const.}$$

Далее, при помощи тех же рассуждений, что при доказательстве леммы 4, можно показать, что уравнение (44) имеет стационарное решение $\chi(z, s)$, единственное с точностью до аддитивной константы. Более того, $\chi(\cdot, s)$ является эргодическим процессом со значениями в $C(\mathbb{T}^n)$. Для определенности положим $\int_{\mathbb{T}^n} \chi(z, s) p(z, s) dz = 0$.

При указанном выборе χ имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - A^\varepsilon \right) v^\varepsilon = & \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \check{a}^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u^0 + \left(a^\varepsilon + \nabla_x^\varepsilon (a^\varepsilon \chi^\varepsilon) + a^\varepsilon \nabla_x^\varepsilon \chi^\varepsilon \right. \\ & \left. + b^\varepsilon \chi^\varepsilon - \bar{b} \chi^\varepsilon - \eta\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) \chi^\varepsilon - \check{a} \right) \nabla_x \nabla_x u^0 + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (45)$$

где $O(\varepsilon)$ сходится к нулю в $L^\infty(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}^n))$ -норме равномерно по $\omega \in \Omega$ и

$$\begin{aligned} \check{a}^{ij} = \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^n} & (a^{ij}(z, \xi_s) + \nabla_{z_k}(a^{ik}(z, \xi_s)\chi^j(z, s)) \\ & + a^{ik}(z, \xi_s)\nabla_{z_k}\chi^j(z, s) + b^i(z, \xi_s)\chi^j(z, s))p(z, s) dz. \end{aligned}$$

Для краткости введем обозначения

$$\begin{aligned} \check{a}_{\text{aux}}^\varepsilon(x, t) = \{\check{a}_{\text{aux}}^{\varepsilon, ij}(x, t)\} = & a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{t/\varepsilon^2}\right) + \nabla_x^\varepsilon\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{t/\varepsilon^2}\right)\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right) \\ & + a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{t/\varepsilon^2}\right)\nabla_x^\varepsilon\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\right) \\ & + b\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{t/\varepsilon^2}\right)\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\right) - \left(\bar{b} + \eta\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right)\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \langle \check{a}_{\text{aux}} \rangle(s) = \int_{\mathbb{T}^n} & \{a^{ij}(z, \xi_s) + \nabla_{z_k}(a^{ik}(z, \xi_s)\chi^j(z, s)) \\ & + a^{ik}(z, \xi_s)\nabla_{z_k}\chi^j(z, s) + b^i(z, \xi_s)\chi^j(z, s)\}p(z, s) dz. \end{aligned}$$

В дальнейшем будет ясно, что $\check{a} = \bar{a}$. Следовательно, первый член в правой части (45) обращается в нуль. Для получения энергетической оценки умножим (45) на $p^\varepsilon v^\varepsilon$ и проинтегрируем результат на множестве $\mathbb{R}^n \times (0, t)$. После простых преобразований это дает

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (v^\varepsilon(x, t))^2 p\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\right) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} p\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon^2}\right) a^{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{\frac{s}{\varepsilon^2}}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} v^\varepsilon(x, s) \frac{\partial}{\partial x_j} v^\varepsilon(x, s) dx ds \\ & = \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} p\left(\frac{x}{\varepsilon}, 0\right) \left(\chi^i\left(\frac{x}{\varepsilon}, 0\right) \frac{\partial}{\partial x_i} u_0(x)\right)^2 dx \\ & \quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} [\check{a}_{\text{aux}}^{\varepsilon, ij}(x, s) - \check{a}^{ij}] p\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon^2}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon^0(x, s) v^\varepsilon(x, s) dx ds \\ & = \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} p\left(\frac{x}{\varepsilon}, 0\right) \left(\chi^i\left(\frac{x}{\varepsilon}, 0\right) \frac{\partial}{\partial x_i} u_0(x)\right)^2 dx \\ & \quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left[\check{a}_{\text{aux}}^{\varepsilon, ij}(x, s) - \langle \check{a}_{\text{aux}} \rangle^{ij}\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right] p\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon^2}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon^0(x, s) v^\varepsilon(x, s) dx ds \\ & \quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left[\langle \check{a}_{\text{aux}} \rangle^{ij}\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right) - \check{a}^{ij}\right] p\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon^2}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon^0(x, s) v^\varepsilon(x, s) dx ds. \end{aligned} \tag{46}$$

Второй интеграл в правой части этой формулы допускает оценку

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left[\check{a}_{\text{aux}}^{\varepsilon, ij}(x, s) - \langle \check{a}_{\text{aux}} \rangle^{ij}\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right] p\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon^2}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon^0(x, s) v^\varepsilon(x, s) dx ds \right| \\ & = \varepsilon \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Psi^{ij, k}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon^2}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon^0(x, s) v^\varepsilon(x, s)\right) dx ds \right| \leq c\varepsilon \end{aligned}$$

с неслучайной постоянной c ; здесь $\Psi^{ij,k}(z, s)$ выбраны так, чтобы выполнялось равенство

$$\operatorname{div} \Psi^{ij}(z, s) = (\check{a}_{\text{aux}}^{\varepsilon, ij}(z, s) - \langle \check{a}_{\text{aux}} \rangle^{ij}) p(z, s).$$

Оценим последний член в (46). Из определения $v^\varepsilon(x, t)$ легко следует, что

$$v^\varepsilon(x, t) = u^\varepsilon(x, t) - u^0\left(x - \bar{b}\frac{t}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon^2}\right) d\tau, t\right) + O(\varepsilon) = u^\varepsilon(x, t) - u_\varepsilon^0(x, t) + O(\varepsilon)$$

равномерно по x, t и ω . Далее, согласно (35) семейство

$$(u^\varepsilon(t) - u_\varepsilon^0(t), \nabla_x \nabla_x u_\varepsilon^0(t)) = (\tilde{u}^\varepsilon(t) - u^0(t), \nabla_x \nabla_x u^0(t))$$

компактно в $(C[0, T])^{n^2}$, поэтому по теореме Биркгофа п.н. выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left[\langle \check{a}_{\text{aux}} \rangle^{ij} \left(\frac{s}{\varepsilon^2} \right) - \check{a}^{ij} \right] p\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon^0(x, s) v^\varepsilon(x, s) dx ds \right| = 0.$$

Мы приходим к следующей лемме.

ЛЕММА 6. *При $\varepsilon \rightarrow 0$ разность $(u^\varepsilon - u_\varepsilon^0)$, а с ней и $(\tilde{u}^\varepsilon - u^0)$, сходится п.н. к нулю в норме пространства $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$.*

Переходим теперь к основным результатам работы. Через $\hat{Q}^\varepsilon$ обозначим распределение функции $\hat{u}^\varepsilon(x, t) = u^\varepsilon(x - \varepsilon^{-1} \bar{b}t, t)$ в V , причем вектор $\bar{b}$ задан формулой (25). Напомним также, что матрица $\{\bar{a}^{ij}\}$ определена в (41).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\{u^\varepsilon\}$ – решение задачи (1); предположим, что $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда меры $\hat{Q}^\varepsilon$ сходятся слабо в V при $\varepsilon \rightarrow 0$ к единственному решению следующего стохастического уравнения в частных производных:*

$$\begin{aligned} du(t) &= \left(\bar{a}^{ij} + \frac{1}{2} (\Lambda^2)^{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u(t) dt + \Lambda \nabla_x u(t) dw_t, \\ u|_{t=0} &= u_0, \end{aligned} \quad (47)$$

с матрицей Λ , заданной формулой

$$(\Lambda^2)^{ij} = \int_0^\infty \mathbb{E}(\eta^i(0)\eta^j(s) + \eta^j(0)\eta^i(s)) ds,$$

и со стандартным n -мерным винеровским процессом w_t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью формулы Ито легко проверить, что функция $u^0(x - \Lambda w_t, t)$ есть решение задачи (47). Согласно [8] эта задача корректна и имеет единственное решение.

Преобразуем функцию $u^\varepsilon(x - \varepsilon^{-1}\bar{b}t, t)$ к следующему виду:

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x - \varepsilon^{-1}\bar{b}t, t) &= u^0\left(x + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right) ds, t\right) \\ &\quad + u^\varepsilon(x - \varepsilon^{-1}\bar{b}t, t) - u^0\left(x + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right) ds, t\right). \end{aligned}$$

Из леммы 6 следует, что $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ -норма разности второго и третьего членов в правой части стремится к нулю п.н. при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому для каждой $\varphi \in C_0^\infty$ семейства

$$(u^\varepsilon(x - \varepsilon^{-1}\bar{b}t, t), \varphi) \quad \text{и} \quad \left(u^0\left(x + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right) ds, t\right), \varphi\right)$$

должны иметь один и тот же предел по распределению в $C(0, T)$.

Отображение $F_\varphi: (C(0, T))^n \rightarrow C(0, T)$, заданное равенством

$$F_\varphi(\theta(\cdot)) = (u^0(\cdot + \theta(t), t), \varphi),$$

непрерывно, поэтому сходимость по распределению в $(C(0, T))^n$ функций

$$\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right) ds \right\}$$

к Λw_t влечет сходимость по распределению функций

$$\left(u^0\left(x + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right) ds, t\right), \varphi\right)$$

к $(u^0(x + \Lambda w_t, t), \varphi)$, и теорема доказана.

Топология пространства V весьма слабая. Следующий результат показывает, что сходимость остается справедливой в более сильной топологии.

ТЕОРЕМА 2. Семейство $\{\hat{u}^\varepsilon\}$ сходится по распределению в функциональном пространстве $V^1 = L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ с сильной топологией (т.е. топологией сходимости по норме).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже доказали, что разность

$$u^\varepsilon(x - \varepsilon^{-1}\bar{b}t, t) - u^0\left(x + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right) ds, t\right)$$

сходится к нулю в пространстве V^1 , т.е. в $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ -норме. По теореме Прохорова и в силу леммы 3 для каждого $\delta > 0$ существует компактное подмножество $K \in (C(0, T))^n$ такое, что

$$\sup_{\varepsilon > 0} \mathbf{P}\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right) ds \notin K \right\} < \delta.$$

Отображение $\Phi: (C(0, T))^n \rightarrow V^1$, заданное равенством

$$\Phi(\theta(\cdot)) = u^0(x + \theta(t), t),$$

непрерывно, поэтому для каждого $\delta > 0$ найдется компактное множество K^1 в V^1 такое, что

$$\sup_{\varepsilon > 0} \mathbf{P} \left\{ u^0 \left(x + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta \left(\frac{s}{\varepsilon^2} \right) ds, t \right) \notin K^1 \right\} < \delta.$$

Благодаря лемме 6 отсюда следует совпадение пределов по распределению в V^1 для семейств

$$\{u^\varepsilon(x - \varepsilon^{-1} \bar{b}t, t)\} \quad \text{и} \quad \left\{ u^0 \left(x + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta \left(\frac{s}{\varepsilon^2} \right) ds, t \right) \right\}.$$

Сходимость по распределению выражений $u^0 \left(x + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \eta \left(\frac{s}{\varepsilon^2} \right) ds, t \right)$ к $u^0(x + \Lambda w_t, t)$ следует из леммы 3 и непрерывности отображения Φ , построенного выше.

§5. Операторы с диффузионными коэффициентами

В этом параграфе мы предполагаем, что процесс ξ , участвующий в определении коэффициентов уравнения (1), является диффузионным. В этом частном случае все коэффициенты эффективного уравнения (47) могут быть найдены в терминах решений вспомогательных детерминированных уравнений в частных производных. Кроме того, различные достаточные условия, обеспечивающие свойства перемешивания **A3** процесса ξ , могут быть сформулированы в терминах коэффициентов генератора ξ .

Напомним обозначение $\zeta_s = \xi_{-s}$ и рассмотрим диффузионный процесс $(\tilde{X}_s, \zeta_s)$ со значениями в $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^d$, соответствующий оператору

$$A + \tilde{L} = \frac{\partial}{\partial z_i} a_{ij}(z, y) \frac{\partial}{\partial z_j} + b_i(z, y) \frac{\partial}{\partial z_i} + \tilde{q}_{kl}(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_l} + \tilde{B}_k(y) \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Согласно [20] и [7] в предположениях **A1**, **A2** и **A3'** процесс $(\tilde{X}_s, \zeta_s)$ имеет единственную инвариантную меру, и плотность этой меры удовлетворяет уравнению

$$(A^* + \tilde{L}^*)\tilde{\rho}(z, y) = 0, \quad \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\rho}(z, y) dy dz = 1. \quad (48)$$

Более того, $\tilde{\rho}(z, y)$ убывает при $|y| \rightarrow \infty$ быстрее, чем любая отрицательная степень $|y|$.

Далее, если $f(z, y)$ — функция полиномиального роста по y , то уравнение

$$(A + \tilde{L})\tilde{\chi}(z, y) = f(z, y)$$

разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{R}^d} f(z, y) \tilde{\rho}(z, y) dy dz = 0; \quad (49)$$

при этом решение также имеет не более чем полиномиальный рост по y .

Мы предполагаем в дальнейшем, что $(\tilde{X}_s, \zeta_s)$ — это стационарный процесс с плотностью $\tilde{\rho}(z, y)$.

Пусть $p(z, s)$ является условной плотностью X_s при условии ξ_τ , $\tau \in [s, +\infty)$. Тогда $p(z, s)$ п.н. удовлетворяет уравнению (16) (см. [17]), и процесс η , определенный в (26), допускает представление

$$\eta(s) = \mathbf{E} \{ \operatorname{div} [a(X_s, \xi_s)] + b^i(X_s, \xi_s) - \bar{b}^i \mid \sigma(\xi_\tau, \tau \geq s) \}.$$

Отметим, что условие (49) эквивалентно равенству $\mathbf{E} f(\tilde{X}_s, \zeta_s) = 0$. В частности, условие разрешимости выполнено для функции $f^b(z, y) = (\operatorname{div}_z [a(z, y)] + b^i(z, y) - \bar{b}^i)$. Обозначим соответствующее решение символом $\chi_b(z, y)$. Применяя формулу Ито к выражению $\chi_b(\tilde{X}_s, \zeta_s)$, после простых преобразований получим

$$\begin{aligned} \int_0^t f^b(\tilde{X}_s, \zeta_s) ds &= \chi_b(\tilde{X}_t, \zeta_t) - \chi_b(\tilde{X}_0, \zeta_0) \\ &\quad + \int_0^t \sigma(\tilde{X}_s, \zeta_s) \nabla_z \chi_b(\tilde{X}_s, \zeta_s) dw_s^1 + \int_0^t \Sigma(\zeta_s) \nabla_y \chi_b(\tilde{X}_s, \zeta_s) dw_s^2, \end{aligned}$$

где w^1 и w^2 — независимые винеровские процессы размерности n и d соответственно и

$$\sigma(z, y) = \sqrt{\{a_{ij}(z, y)\}}, \quad \Sigma(y) = \sqrt{\{q_{kl}(y)\}}.$$

Взяв в предыдущей формуле условное математическое ожидание относительно σ -алгебры $\tilde{\mathcal{F}}_{-\infty, t} = \sigma\{\zeta_\tau, -\infty < \tau \leq t\} = \mathcal{F}_{-t, +\infty}$ и приняв во внимание независимость $\{\zeta_s\}$ и w^1 , найдем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \eta_{-s} ds &= \frac{1}{\sqrt{t}} \mathbf{E} \{ \chi_b(\tilde{X}_t, \zeta_t) \mid \tilde{\mathcal{F}}_{-\infty, t} \} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{t}} \mathbf{E} \left\{ \int_0^t \Sigma(\zeta_s) \nabla_y \chi_b(\tilde{X}_s, \zeta_s) dw_s^2 \mid \tilde{\mathcal{F}}_{-\infty, t} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \mathbf{E} \{ \chi_b(\tilde{X}_t, \zeta_t) \mid \tilde{\mathcal{F}}_{-\infty, t} \} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \mathbf{E} \{ \Sigma(\zeta_s) \nabla_y \chi_b(\tilde{X}_s, \zeta_s) \mid \tilde{\mathcal{F}}_{-\infty, s} \} dw_s^2, \end{aligned}$$

где η_s это процесс, заданный в (26).

Первый член в правой части стремится к нулю, когда $t \rightarrow \infty$. Вычисляя квадратичную характеристику интеграла Ито во втором члене и используя теорему Биркгофа, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t q(\zeta_s) \mathbf{E} \{ \nabla_y \chi_b^i(\tilde{X}_s, \zeta_s) \mid \tilde{\mathcal{F}}_{-\infty, s} \} \mathbf{E} \{ \nabla_y \chi_b^j(\tilde{X}_s, \zeta_s) \mid \tilde{\mathcal{F}}_{-\infty, s} \} ds \\ \rightarrow \mathbf{E} \left(q(\zeta_0) \mathbf{E} \{ \nabla_y \chi_b^i(\tilde{X}_0, \zeta_0) \mid \tilde{\mathcal{F}}_{-\infty, 0} \} \mathbf{E} \{ \nabla_y \chi_b^j(\tilde{X}_0, \zeta_0) \mid \tilde{\mathcal{F}}_{-\infty, 0} \} \right) \\ = \mathbf{E} \left(q(\xi_0) \mathbf{E} \{ \nabla_y \chi_b^i(\tilde{X}_0, \xi_0) \mid \mathcal{F}_{0, +\infty} \} \mathbf{E} \{ \nabla_y \chi_b^j(\tilde{X}_0, \xi_0) \mid \mathcal{F}_{0, +\infty} \} \right) = (\Lambda^2)^{ij}. \end{aligned}$$

Наконец, согласно [18; теоремы 9.1, 9.2] имеет место сходимость

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_0^{t\tau} \eta_{-s} ds \xrightarrow[\tau \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \Lambda W_t,$$

где W_t — стандартный n -мерный винеровский процесс.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. G. Aronson. Bounds for the fundamental solutions of a parabolic equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 890–896.
- [2] M. Avellaneda, A. J. Majda. Mathematical models with exact renormalization for turbulent transport // Comm. Math. Phys. 1990. V. 131. №2. P. 381–429.
- [3] M. Avellaneda, A. J. Majda. Simple examples with features of renormalization for turbulent transport // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. 1994. V. 346. №1679. P. 205–233.
- [4] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou. Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. (Stud. Math. Appl. V. 5.)
- [5] П. Биллингсли. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
- [6] R. Bouc, E. Pardoux. Asymptotic analysis of p.d.e.s with wide-band noise disturbances, and expansion of the moments // Stochastic Anal. Appl. 1984. V. 2. №4. P. 369–422.
- [7] F. Campillo, M. Kleptsyna, A. Piatnitski. Homogenization of random parabolic operator with large potential // Stochastic Process. Appl. 2001. V. 93. №1. P. 57–85.
- [8] G. Da Prato, J. Zabczyk. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. (Encyclopedia Math. Appl. V. 44.)
- [9] A. Fannjiang, G. Papanicolaou. Convection enhanced diffusion for periodic flows // SIAM J. Appl. Math. 1994. V. 54. №2. P. 333–408.
- [10] A. Fannjiang, G. Papanicolaou. Diffusion in turbulence // Probab. Theory Related Fields. 1996. V. 105. №3. P. 279–334.
- [11] J. Garnier. Homogenization in a periodic and time-dependent potential // SIAM J. Appl. Math. 1997. V. 57. №1. P. 95–111.
- [12] V. Jikov, S. Kozlov, O. Oleinik. Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
- [13] M. Kleptsyna, A. Piatnitski. Homogenization of random parabolic operators // Homogenization and Applications to Material Sciences: Proceedings of the International Conference, Nice, 1995. Tokyo: Gakkōtoshō, 1997. P. 241–255. (GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. V. 9.)
- [14] С. М. Козлов. Приводимость квазипериодических дифференциальных операторов и усреднение // Труды ММО. 1983. Т. 46. С. 99–123.
- [15] С. М. Козлов, А. Л. Пятницкий. Усреднение на фоне исчезающей вязкости // Матем. сб. 1990. Т. 181. №6. С. 813–832.
- [16] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [17] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
- [18] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.
- [19] E. Pardoux. Homogenization of linear and semilinear second order parabolic PDEs with periodic coefficients: a probabilistic approach // J. Funct. Anal. 1999. V. 167. №2. P. 498–520.
- [20] E. Pardoux, A. Yu. Veretennikov. On the Poisson equation and diffusion approximation. I // Ann. Probab. 2001. V. 29. №3. P. 1061–1085.
- [21] А. Л. Пятницкий. Усреднение сингулярно возмущенного уравнения с быстроосциллирующими коэффициентами в слое // Матем. сб. 1983. Т. 121. №1. С. 18–39.
- [22] N. S. Trudinger. Pointwise estimates and quasilinear parabolic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. P. 205–226.

- [23] M. Viot. Solutions Faibles d'Équations Dérivées Stochastiques Non Linéaires // Thèse. Université Paris VI, 1976.
- [24] В. В. Жиков. Замечания к проблеме остаточной диффузии // УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 155–156.
- [25] В. В. Жиков. Диффузия в несжимаемом случайном потоке // Функци. анализ и его прил. 1997. Т. 31. № 3. С. 10–22.

Институт проблем передачи информации РАН;
Технологический институт Нарвика, Норвегия,
Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН
E-mail: Masha.Kleptsyna@id.ru, andrey@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию
05.04.2002