Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Ширикян, Аналитичность решений случайно возмущенных двумерных уравнений Навье–Стокса, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 151–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm536>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 09:27:52

УДК 517.95

Посвящается Марку Иосифовичу Вишику по случаю его восьмидесятилетия

АНАЛИТИЧНОСТЬ РЕШЕНИЙ СЛУЧАЙНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

А. Ширикян

Изучаются случайно возмущенные двумерные уравнения Навье–Стокса с периодическими граничными условиями. В предположении, что случайное возмущение аналитично по пространственным переменным и является белым шумом по времени, доказано, что широкий класс решений, содержащий *все* стационарные решения с конечной энергией, допускает аналитическое продолжение в малую комплексную окрестность тора. Более того, получена оценка снизу для радиуса аналитичности в терминах вязкости ν и установлено, что для любого $\delta > 0$ диссипационный масштаб Колмогорова асимптотически оценивается снизу через $\nu^{2+\delta}$.

Библиография: 19 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	151
§ 1. Предварительные сведения	153
1.1. Задача Коши для системы Навье–Стокса	153
1.2. Формула Ито и среднее значение функционалов	155
§ 2. Основные результаты	157
§ 3. Доказательства	159
3.1. Доказательство теоремы 2.1	159
3.2. Доказательство теоремы 2.2	165
Список литературы	166

Введение

Настоящая статья посвящена исследованию некоторых свойств течения двумерной несжимаемой жидкости при малых значениях вязкости. А именно, рассматривается задача Коши для двумерных уравнений Навье–Стокса

$$\dot{u} - \nu \Delta u + (u, \nabla)u - \nabla p = \eta(t, x), \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (0.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (0.2)$$

где $\nu > 0$ – вязкость, $u = u(t, x)$ – векторное поле жидкости, p – давление, η – внешняя сила, а u_0 – начальная функция. Уравнения (0.1), (0.2) дополняются периодически граничными условиями, т.е. задача изучается на двумерном торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$.

Хорошо известно, что если правая часть $\eta(t, x)$ является аналитической функцией переменных (t, x) , то решение задачи (0.1), (0.2) также аналитично при $t > 0$ (см., например, [16], [10], [8], [5]). При этом более подробный анализ позволяет получить оценку снизу для радиуса аналитичности решений в терминах вязкости ν . Например, как показано в [9], для любого $\delta > 0$ радиус аналитичности оценивается снизу функцией вида $c\nu^{1/2+\delta}$. Этот факт тесно связан с гипотезой Колмогорова–Обухова о поведении энергетического спектра решений. Грубо говоря, в двумерном случае гипотеза состоит в том, что существует порог λ_{2D} , называемый диссипационным масштабом Колмогорова, такой, что энергия, соответствующая волновому числу k , убывает как k^{-3} при $k \leq \lambda_{2D}^{-1}$ и экспоненциально мала при $k \geq \lambda_{2D}^{-1}$. Из упомянутой выше оценки для радиуса аналитичности следует, что если гипотеза верна, то $\lambda_{2D} \gtrsim \nu^{1/2+\delta}$ для любого $\delta > 0$. Более подробное обсуждение можно найти в работах [9], [13], [12], [6], [7] и приведенной там библиографии.

Целью настоящей статьи является исследование аналитичности решений задачи (0.1), (0.2) при условии, что правая часть η – случайный процесс, аналитический по x и являющийся белым шумом по t . Эта задача изучалась ранее в работах [17], [1], где анализ основан на представлении Фурье решений. В частности, как показано в [1], решение задачи (0.1), (0.2) с детерминистской начальной функцией u_0 аналитично по x с вероятностью 1, а радиус аналитичности оценивается снизу через $\nu^{3+\delta}$ для любого $\delta > 0$.

Отметим, что наша техника, которая отлична от методов работ [17], [1], не является новой: мы используем представление решений в виде суммы процесса Орнштейна–Уленбека и решения некоторого вспомогательного уравнения типа Навье–Стокса (см. [3; § 15.2]), а также одну оценку для нормы нелинейного члена в пространстве аналитических функций (см. [5]). Однако подход, использованный в настоящей статье, приводит к более равномерным оценкам для нормы решений и к более точной нижней границе для радиуса аналитичности ρ_ν . А именно доказывается, что $\rho_\nu \gtrsim \nu^{2+\delta}$ для любого $\delta > 0$. Мы также показываем, что оценки, установленные для решений задачи Коши, справедливы для *всех* стационарных решений с конечной энергией. Отметим, что наши доказательства не используют структуру нелинейности системы Навье–Стокса и остаются справедливыми для других случайно возмущенных параболических задач.

Статья организована следующим образом. В § 1 собраны некоторые сведения о задаче Коши для уравнений Навье–Стокса и о формуле Ито для стохастических уравнений с частными производными (УрЧП). Основные результаты настоящей статьи, которыми являются теоремы 2.1, 2.2, сформулированы во втором параграфе. Доказательства приводятся в § 3.

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору С.Б. Куксину за обсуждение результатов настоящей статьи. Исследование поддержано грантом GR/N63055/01 от EPSRC.

Обозначения. Через $H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2)$ будем обозначать пространство вектор-функций (u_1, u_2) на торе $\mathbb{T}^2$, компоненты которых принадлежат пространству Соболева порядка s . При $s = 0$ получаем обычное пространство $L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2)$ с естественным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и соответствующей нормой $|\cdot|$.

Пространства H и V , возникающие в теории уравнений Навье–Стокса, определе-

ны в разделе 1.1. Пусть L – сужение оператора $(-\Delta)$ на H с естественной областью определения. Обозначим через $((u, v)) = (Lu, v)$ скалярное произведение в пространстве V , а через $\|\cdot\|$ – соответствующую норму.

Пусть $\mathbb{Z}_0^2 = \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, и пусть $\{e_j, j \in \mathbb{Z}_0^2\}$ – тригонометрический базис в пространстве H , определенный по формулам (1.3). Для любой непрерывной вещественной функции $f(s)$, определенной на неотрицательной полуоси, и вектор-функции $u(x)$ положим

$$f(L)u := \sum_{j \in \mathbb{Z}_0^2} f(\alpha_j) u_j e_j(x),$$

где $\alpha_j = |j|^2$ – собственное значение L , соответствующее собственной функции e_j , а $u_j = (u, e_j)$ – коэффициенты Фурье для $u(x)$.

Мы будем использовать также следующие скалярные произведения в пространствах аналитических функций:

$$(u, v)_\theta = (e^{\theta L^{1/2}} u, e^{\theta L^{1/2}} v), \quad ((u, v))_\theta = ((e^{\theta L^{1/2}} u, e^{\theta L^{1/2}} v)), \quad \theta > 0.$$

Соответствующие нормы будут обозначаться через $|\cdot|_\theta$ и $\|\cdot\|_\theta$.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Задача Коши для системы Навье–Стокса. Доказательство корректности задачи Коши для двумерных уравнений Навье–Стокса со случайной внешней силой можно найти в [19] (см. также [3], [4]). Для удобства читателя мы напомним определение решения уравнения (0.1) и сформулируем теорему о его существовании и единственности.

Обозначим через H подпространство в $L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2)$, состоящее из векторных полей $u(x)$ таких, что $\operatorname{div} u = 0$ и

$$\langle u \rangle := \int_{\mathbb{T}^2} u(x) dx = 0.$$

Через Π будем обозначать ортогональный проектор в $L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2)$ на подпространство H . После проектирования на H система Навье–Стокса принимает вид (см. [19], [18])

$$\dot{u} + \nu Lu + B(u, u) = \eta(t), \quad (1.1)$$

где L – сужение лапласиана $-\Delta$ на H , $B(u, u) = \Pi(u, \nabla)u$ – нелинейный член, а $\eta(t)$ – проекция внешней силы. (Для простоты обозначений мы используем одну и ту же букву для внешней силы и ее проекции на H .) Уравнение (1.1) дополняется начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (1.2)$$

Опишем теперь класс правых частей для задачи (1.1), (1.2). Пусть $\mathbb{Z}'$ – такое подмножество в $\mathbb{Z}_0^2 = \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, что $\mathbb{Z}' \cup (-\mathbb{Z}') = \mathbb{Z}_0^2$. Определим тригонометрический базис в H по формулам

$$e_j(x) = \frac{\sin(jx) j^\perp}{\sqrt{2\pi}|j|}, \quad e_{-j}(x) = \frac{\cos(jx) j^\perp}{\sqrt{2\pi}|j|}, \quad j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}', \quad (1.3)$$

где $j^\perp = (-j_2, j_1)$, а $|j| = (j_1^2 + j_2^2)^{1/2}$. Легко видеть, что $\{e_j, j \in \mathbb{Z}_0^2\}$ – базис в пространстве H , причем e_j – собственная функция оператора L с собственным значением $\alpha_j = |j|^2$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – полное вероятностное пространство, а $\mathcal{F}_t, t \geq 0$, – возрастающее семейство σ -алгебр, полных относительно $\mathcal{F}, \mathbf{P}$ (см. [11; §I.3]). Мы предполагаем, что правая часть уравнения (1.1) имеет вид

$$\eta(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \zeta(t, x), \quad \zeta(t, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_0^2} b_j \beta_j(t) e_j(x), \quad (1.4)$$

где β_j – независимые стандартные винеровские процессы относительно $\mathcal{F}_t$, а b_j – вещественные константы, удовлетворяющие условию

$$B := \sum_{j \in \mathbb{Z}_0^2} |j|^2 b_j^2 < \infty. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.1) рассматривается как стохастическое УрЧП Ито. Что касается начальной функции $u_0 = u_0(x)$, мы предполагаем, что она является случайной величиной в H , измеримой относительно $\mathcal{F}_0$.

Для любого $T > 0$ и банахова пространства X через $C(0, T; X)$ будем обозначать множество непрерывных функций из $[0, T]$ в X , а через $L^2(0, T; X)$ – множество измеримых по Бохнеру функций $f: [0, T] \rightarrow X$, для которых $\int_0^T \|f(t)\|_X^2 dt < \infty$. Пространства $L^2(0, T; X)$, $C(0, T; X)$ снабжаются естественными нормами. Положим $V = H^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2) \cap H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Случайные процесс $u(t) = u(t, x)$ в пространстве H , определенный на полуоси $t \geq 0$ и прогрессивно измеримый относительно $\mathcal{F}_t$, называется *сильным решением* задачи (1.1), (1.2), если с вероятностью 1 выполнены следующие свойства.

- (i) Для любого $T > 0$ функция $u(t, x)$ принадлежит $L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H)$.
- (ii) Для любого $t > 0$ имеем

$$u(t) + \int_0^t (\nu Lu + B(u, u)) ds = u_0 + \zeta(t),$$

где левая и правая части этого соотношения рассматриваются как элементы пространства $H^{-1}(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2)$.

Обозначим $H^s = H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2) \cap H$. Имеет место следующий результат о существовании и единственности решения.

ТЕОРЕМА 1.2. При упомянутых выше условиях задача Коши (1.1), (1.2) имеет, притом единственное, сильное решение на полуоси $[0, \infty)$. Более того, справедливы следующие два утверждения.

- (i) С вероятностью 1 при $t > 0$ траектория $u(t)$ непрерывна в пространстве V .

- (ii) Если $P\{u_0 \in V\} = 1$, то с вероятностью 1 для любого $T > 0$ функция $u(t)$ принадлежит пространству $L^2(0, T; H^2) \cap C(0, T; V)$, причем

$$E \int_0^T |Lu(t)|^2 dt \leq B\nu^{-1}T, \quad (1.6)$$

где константа B задается формулой (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и единственность решения и неравенство (1.6) установлены в [19], [3], [4]. Приведем набросок доказательства остальных утверждений.

Решение задачи (1.1), (1.2) ищется в виде

$$u(t, x) = z(t, x) + v(t, x), \quad (1.7)$$

где

$$z(t, x) = \int_0^t e^{-\nu(t-s)L} d\zeta(s).$$

Используя стандартную технику (см. §§ 5.1, 5.2 в книге [3]), нетрудно показать, что $z \in C(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2)$ почти наверное для любого $T < \infty$. Функция $v(t, x)$ удовлетворяет следующему уравнению со случайными коэффициентами:

$$\dot{v} + \nu Lv + B(z + v, z + v) = 0. \quad (1.8)$$

Пользуясь упомянутым выше свойством гладкости z и применяя хорошо известные рассуждения теории детерминистских уравнений Навье–Стокса (см., например, [15]), можно установить требуемые утверждения.

Напомним, что множество всех решений, соответствующих детерминистским начальным данным $u_0 \in H$, образует семейство марковских процессов с переходной функцией

$$P_t(u_0, \Gamma) = P\{u(t, u_0) \in \Gamma\}, \quad t \geq 0, \quad \Gamma \in \mathcal{B}(H),$$

где $\mathcal{B}(H)$ – борелевская σ -алгебра в пространстве H , а $u(t, u_0)$ обозначает решение задачи (1.1), (1.2). Из утверждения (i) теоремы 1.2, в частности, следует, что

$$P_t(u_0, V) = 1 \quad \text{для любых } t > 0, \quad u_0 \in H. \quad (1.9)$$

1.2. Формула Ито и среднее значение функционалов. В настоящем разделе мы обсуждаем бесконечномерный вариант формулы Ито и показываем, как она используется для оценки среднего значения некоторых функционалов от решений системы Навье–Стокса. Используемая здесь техника хорошо известна в конечномерном случае и остается справедливой для “любого разумного” стохастического УрЧП с аддитивным шумом (ср. [19], [18], [3], [4], [14]).

Как и выше, предполагается, что выполнено условие (1.5). Рассмотрим решение $u(t)$ задачи (1.1), (1.2) с начальной функцией, удовлетворяющей условию $P\{u_0 \in V\} = 1$. Пусть $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ – дважды непрерывно дифференцируемый (в смысле Фреше) функционал. Обозначим через F' , F'' производные функционала F , а через $F'(u; v)$, $F''(u; v)$ – их значения на векторе $v \in V$ в точке u .

ТЕОРЕМА 1.3. *Предположим, что F, F', F'' равномерно непрерывны на ограниченных подмножествах пространства V , причем производная F' удовлетворяет неравенству*

$$|F'(u; v)| \leq K(\|u\|)|Lu||v| \quad \text{при } u \in H^2, \quad v \in H, \quad (1.10)$$

где положительная функция $K(s)$, $s \geq 0$, ограничена на любом компакте. Тогда процесс $F(u(t))$ обладает стохастическим дифференциалом, который имеет вид

$$dF(u(t)) = \left(-F'(u; Lu + B(u, u)) + \frac{1}{2} \sum_j b_j^2 F''(u; e_j) \right) dt + \sum_j b_j F'(u; e_j) d\beta_j, \quad (1.11)$$

где мы сохранили обозначение $F'(u, \cdot)$ для продолжения F' по непрерывности на пространство H .

Если бы процесс $u(t)$ обладал стохастическим дифференциалом в пространстве V , то формула (1.11) следовала бы из теоремы 4.17 книги [2]. Чтобы установить требуемое утверждение в нашей ситуации, достаточно применить упомянутую выше теорему к процессу $u_\varepsilon(t) = (1 + \varepsilon L)^{-1}u(t)$, $\varepsilon > 0$, а затем перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Мы не будем на этом останавливаться.

Воспользуемся теперь формулой Ито (1.11) для оценки среднего значения функционала $F(u(t))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Пусть $F(u): V \rightarrow \mathbb{R}$ — положительный функционал, удовлетворяющий условиям теоремы 1.3. Предположим, что*

$$-F'(u; Lu + B(u, u)) + \frac{1}{2} \sum_j b_j^2 F''(u; e_j) \leq -\kappa F(u) + C \quad \text{при всех } u \in H^2, \quad (1.12)$$

где κ, C — положительные константы. Тогда для любого решения задачи (1.1), (1.2) с начальной функцией u_0 , удовлетворяющей условиям $P\{u_0 \in V\} = 1$ и $EF(u_0) < \infty$, имеем

$$EF(u(t)) \leq e^{-\kappa t} EF(u_0) + C/\kappa, \quad t \geq 0. \quad (1.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем хорошо известную технику марковских моментов (ср. [19] или [14]). Определим последовательность марковских моментов τ_n по следующему правилу: если $\|u_0\| \geq n$, то $\tau_n = 0$, а если $\|u_0\| < n$, то

$$\tau_n = \min\{t \geq 0 : \|u(t)\| = n\}.$$

Ясно, что $\tau_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$ почти наверное. Более того, из неравенства (1.10) следует, что с вероятностью 1 справедлива оценка

$$I_{t \leq \tau_n}(t) \sum_j |b_j F'(u; e_j)|^2 \leq C_n |Lu(t)|^2 \sum_j b_j^2 \leq C'_n |Lu(t)|^2,$$

где C_n, C'_n – положительные константы, а $I_{t \leq \tau_n}$ обозначает характеристическую функцию интервала $[0, \tau_n]$. Принимая во внимание неравенство (1.6), заключаем, что марковские моменты τ_n являются локализирующими моментами для стохастического интеграла (см. [11; § III.4])

$$M_t := \sum_j \int_0^t b_j F'(u(s); e_j) d\beta_j(s).$$

Таким образом, ввиду соотношения (1.11) имеем

$$F(u(t \wedge \tau_n)) = F(u_0) + \int_0^{t \wedge \tau_n} a(s, \omega) ds + M_{t \wedge \tau_n}, \quad (1.14)$$

где через $a(t, \omega)$ мы обозначили коэффициент при dt в формуле (1.11). Заметим теперь, что все слагаемые в (1.14) обладают конечным средним значением. Поэтому, беря среднее значение и вспоминая, что $EM_{t \wedge \tau_n} = 0$, получим

$$EF(u(t \wedge \tau_n)) = EF(u_0) + E \int_0^{t \wedge \tau_n} a(s, \omega) ds. \quad (1.15)$$

С вероятностью 1 имеем $u(t) \in H^2$ при почти всех t . Из неравенства (1.12) следует, что $a(t, \omega) \leq -\kappa F(u(t)) + C$ при почти всех $t \geq 0$. Подставляя эту оценку в (1.15), приходим к неравенству

$$EF(u(t \wedge \tau_n)) + \kappa E \int_0^{t \wedge \tau_n} F(u(s)) ds \leq EF(u_0) + CE(t \wedge \tau_n).$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и используя лемму Фату и теорему Фубини, получим

$$EF(u(t)) + \kappa \int_0^t EF(u(s)) ds \leq EF(u_0) + Ct.$$

Требуемая оценка (1.13) следует теперь из неравенства Гронуолла.

§ 2. Основные результаты

Рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.2). В дальнейшем будем предполагать, что выполнены условия, гарантирующие существование и единственность решения, и, более того, коэффициенты b_j из правой части (1.1) (см. (1.4)) удовлетворяют следующему неравенству при некотором $\rho > 0$:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_0^2} e^{2\rho|j|} b_j^2 < \infty. \quad (2.1)$$

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $u_0 = u_0^\nu(x)$ – семейство начальных функций, удовлетворяющих неравенству

$$E \exp(\sigma \nu \|u_0^\nu\|^2) \leq R \quad \text{при} \quad 0 < \nu \leq 1, \quad (2.2)$$

где положительные константы σ , R не зависят от ν . Тогда для любых $\tau > 0$, $t_0 \geq \tau$, $T > 0$, $\delta \in (0, 1]$ найдется такое семейство положительных случайных величин r_ν , что

$$C_\nu(t_0, T) := \sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + T} \|\exp(r_\nu \nu^{2+\delta} L^{1/2}) u(t, \cdot)\| < \infty \quad \text{почти наверное.} \quad (2.3)$$

Более того, справедливы следующие утверждения:

- (i) для любого целого числа $m \geq 1$ существует константа $K_m > 0$ такая, что

$$\mathbb{E} r_\nu^{-m} \leq K_m, \quad \mathbb{E} C_\nu^m \leq K_m \nu^{-m/2} \quad \text{при} \quad 0 < \nu \leq 1; \quad (2.4)$$

- (ii) константы K_m зависят от τ , T , σ , δ , R , но не от t_0 и ν .

Из приведенной выше теоремы, в частности, следует, что любое решение задачи (1.1), (1.2) с детерминистской начальной функцией $u_0 \in V$ аналитично по x с вероятностью 1, причем соответствующий радиус аналитичности (и диссипационный масштаб Колмогорова) асимптотически оценивается снизу величиной $\nu^{2+\delta}$ для любого $\delta > 0$.

Теорема 2.1 влечет оценку сверху для коэффициентов Фурье решений. А именно, разложим функцию $u(t, x)$ в базисе $\{e_j\}$:

$$u(t, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_0^2} u_j(t) e_j(x). \quad (2.5)$$

Из (2.3) следует, что с вероятностью 1

$$\sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + T} |u_j(t)| \leq C_\nu(t_0, T) \exp(-r_\nu \nu^{2+\delta} |j|).$$

Напомним теперь, что решение $v(t, x)$ уравнения (1.1) называется *стационарным*, если его распределение не зависит от t . Следующее утверждение показывает, что теорема 2.1 применима ко всем стационарным решениям уравнения (1.1).

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть выполнено условие (1.5), и пусть $v(t, x)$ — стационарное решение (1.1) при некотором $\nu \in (0, 1]$. Тогда найдутся положительные константы σ , C , не зависящие от ν , $v(t, x)$, такие, что

$$\mathbb{E} \exp(\sigma \nu \|v(t, \cdot)\|^2) \leq C, \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

В частности, если выполнено условие (2.1), то утверждение теоремы 2.1 справедливо для $v(t, x)$.

Доказательства теорем 2.1, 2.2 приведены в следующем параграфе.

§ 3. Доказательства

3.1. Доказательство теоремы 2.1. Приведем сначала схему доказательства, которое основано на представлении решений уравнения (1.1) в виде суммы процесса Орнштейна–Уленбека и решения некоторого вспомогательного уравнения. Более точно, зафиксируем произвольное $t_0 \geq \tau$ и положим

$$z(t, x) = \int_{t_1}^t e^{-\nu(t-s)L} d\zeta(s), \quad (3.1)$$

где $t_1 = t_0 - \tau$, а процесс $\zeta(t, x)$ определен в (1.4). Ясно, что

$$\dot{z} + \nu Lz = \eta(t, x), \quad t \geq t_0 - \tau. \quad (3.2)$$

Решение задачи (1.1), (1.2) представимо в виде (1.7), где $v(t, x)$ – решение уравнения (1.8). Кроме того, для любого $s \geq t_0 - \tau$ функция v удовлетворяет “начальному условию”

$$v(s, x) = u(s, x) - z(s, x). \quad (3.3)$$

Зафиксируем теперь произвольное $s \in [t_0 - \tau, t_0 + T]$ и рассмотрим функционал

$$\varphi_s(t) = \|e^{(t-s)L^{1/2}} v(t, \cdot)\|^2 + 1. \quad (3.4)$$

Используя уравнение (1.8), некоторые явные оценки для процесса Орнштейна–Уленбека (3.1) и одно неравенство из [5] для нелинейного члена, можно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ и некоторой случайной константы $A_\varepsilon > 0$ (зависящей от коэффициентов b_j , но не от начальной функции u_0) функция $\varphi_s(t)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\dot{\varphi}_s \leq A_\varepsilon \nu^{-\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \varphi_s^{\frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon}}. \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что $\varphi_s(t)$ равномерно ограничена при $0 \leq t - s \lesssim \nu^{\frac{2+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$. Сопоставляя этот факт с одной оценкой для $z(t, x)$, получим требуемый результат.

Перейдем теперь к подробному доказательству, которое разбито на несколько шагов.

Шаг 1. Начнем с оценки второго экспоненциального момента решений. Определим $b_{\max}$ как максимум чисел b_j . Напомним, что константа B задается формулой (1.5).

ЛЕММА 3.1. Пусть $u_0 = u_0^\nu$ – семейство случайных величин в пространстве V , и пусть константа $\sigma > 0$ настолько мала, что $2\sigma b_{\max}^2 \leq 1$. Предположим, что $\mathbf{E} \exp(\sigma \nu \|u_0^\nu\|^2) < \infty$ при $0 < \nu \leq 1$. Тогда решение задачи (1.1), (1.2) удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{E} \exp(\sigma \nu \|u(t)\|^2) \leq e^{-\sigma \nu t} \mathbf{E} \exp(\sigma \nu \|u_0^\nu\|^2) + C(\sigma, B), \quad t \geq 0, \quad (3.6)$$

где $0 < \nu \leq 1$, $C(\sigma, B) = B e^{\sigma(B+1)}$. В частности, найдется такое $\sigma_0 > 0$, что для любого $k > 0$ и некоторой константы $C_k > 0$ имеем

$$\mathbf{E} \|u(t)\|^{2k} \leq C_k \mathbf{E} \exp(\sigma_0 \nu \|u_0^\nu\|^2) \nu^{-k}, \quad t \geq 0. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы хотим применить предложение 1.4 с функционалом $F(u) = \exp(\nu\sigma\|u\|^2)$. Ясно, что $F(u)$ является бесконечно дифференцируемым в смысле Фреше, причем производные равномерно ограничены на ограниченных подмножествах пространства V . В частности, ввиду теоремы о среднем значении функции F , F' , F'' равномерно непрерывны на ограниченных множествах. Проверим теперь неравенства (1.10) и (1.12).

Неравенство (1.10) сразу следует из соотношения

$$F'(u; v) = 2\nu\sigma((u, v)) \exp(\nu\sigma\|u\|^2) = 2\nu\sigma(Lu, v) \exp(\nu\sigma\|u\|^2).$$

Далее, имеем

$$F''(u; v) = 2\nu\sigma \exp(\nu\sigma\|u\|^2)((Lv, v) + 2\nu\sigma(Lu, v)^2).$$

Сопоставляя приведенные выше формулы с тождеством $(B(u, u), Lu) = 0$ и неравенством $|Lu| \geq \|u\|$, $u \in H^2$, и обозначая через A выражение в левой части (1.12), получим

$$\begin{aligned} A &= -\sigma\nu F(u) \left(2|Lu|^2 - \sum_j |j|^2 b_j^2 - 2\sigma\nu \sum_j |j|^4 u_j^2 b_j^2 \right) \\ &\leq -\sigma\nu F(u) (2|Lu|^2 - B - 2\sigma b_{\max}^2 |Lu|^2) \leq -\sigma\nu F(u) (\|u\|^2 - B), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где u_j — коэффициенты Фурье функции $u \in H^2$. Если $\|u\|^2 \geq B + 1$, то правая часть (3.8) не превосходит $-\sigma\nu F(u)$. В противном случае она оценивается через $\sigma\nu C(\sigma, B)$. Таким образом, справедливо неравенство (1.12) с константами $\varkappa = -\sigma\nu$ и $C = \sigma\nu C(\sigma, B)$. Требуемая оценка (3.6) следует теперь из (1.13).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Отметим, что оценка, аналогичная (3.6), справедлива в случае, когда $u_0 = u_0^\nu$ — случайные величины в пространстве H . А именно, если

$$\mathbb{E} \exp(\sigma\nu |u_0^\nu|^2) < \infty$$

для некоторой константы $\sigma > 0$, удовлетворяющей условию $2\sigma b_{\max}^2 \leq 1$, то

$$\mathbb{E} \exp(\sigma\nu |u(t)|^2) \leq e^{-\sigma\nu t} \mathbb{E} \exp(\sigma\nu |u_0^\nu|^2) + C(\sigma, B_0), \quad t \geq 0, \quad (3.9)$$

где $B_0 = \sum_j b_j^2$, $0 < \nu \leq 1$. Для доказательства (3.9) достаточно применить формулу Ито к функционалу $\exp(\sigma\nu |u|^2)$ и повторить приведенные выше рассуждения. Более того, не трудно видеть, что доказательство неравенства (3.9) остается справедливым при граничном условии Дирихле, если $2\sigma b_{\max}^2 \leq \alpha_1$, где $\alpha_1 > 0$ — наименьшее собственное значение оператора Стокса L .

Шаг 2. Установим теперь оценку для верхней грани по конечному временному отрезку для нормы решений. А именно, зафиксируем произвольные $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq t_1$ и определим случайную величину

$$U(t_1, t_2) := \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \left(\|u(t)\|^2 + \nu \int_{t_1}^t |Lu(s)|^2 ds \right). \quad (3.10)$$

ЛЕММА 3.3. Для любых $T > 0$ и $k > 0$ найдется такая константа $C_k = C_k(B, T)$, что

$$\mathbf{E}(U(t_1, t_2)^k) \leq C_k \nu^{-k} \mathbf{E} \exp(\sigma_0 \nu \|u_0\|^2) \quad \text{при } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_1 + T, \quad (3.11)$$

где $\sigma_0 > 0$ – константа из леммы 3.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем хорошо известное рассуждение (см. [19], [4]). Без ограничения общности будем считать, что $k \geq 2$. В силу энергетического тождества, которое следует из формулы Ито (1.11), примененной к функционалу $F(u) = \|u\|^2$, имеем

$$\|u(t)\|^2 + 2\nu \int_{t_1}^t |Lu|^2 ds = \|u(t_1)\|^2 + B(t - t_1) + 2 \int_{t_1}^t (Lu, d\zeta), \quad (3.12)$$

где случайный процесс $\zeta(t, x)$ определен в (1.4),

$$(Lu, d\zeta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_0^2} b_j |j|^2 u_j(t) d\beta_j(t).$$

Из неравенства Буркхольдера–Дэвиса–Ганди (см. [3; теорема 5.2.4]) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \left| \int_{t_1}^t (Lu, d\zeta) \right|^k &\leq \mathbf{E} \left(\sum_j \int_{t_1}^{t_2} |j|^4 b_j^2 u_j^2 ds \right)^{k/2} \\ &\leq T^{(k-2)/2} \max_j (|j|^2 b_j^2)^{k/2} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{E} \|u(s)\|^k ds \\ &\leq c_1(k, B) T^{k/2} \nu^{-k/2} \mathbf{E} \exp(\sigma_0 \nu \|u_0\|^2), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где для вывода третьего неравенства мы использовали оценку (3.7). Беря верхнюю грань по $t \in [t_1, t_2]$ обеих частей (3.12), возведя полученное соотношение в k -ю степень, применяя математическое ожидание и используя (3.13), получим

$$\mathbf{E}(U(t_1, t_2)^k) \leq c_2(k) (\mathbf{E} \|u(t_1)\|^{2k} + B^k T^k + c_1(k, B) T^{k/2} \nu^{-k/2} \mathbf{E} \exp(\sigma_0 \nu \|u_0\|^2)).$$

Требуемое неравенство (3.11) следует теперь из (3.7).

Шаг 3. Получим теперь оценку для процесса Орнштейна–Уленбека, определенного формулой (3.1). Зафиксируем произвольные $\theta > 0$, $t_1 \geq 0$, $t_2 > t_1$ и рассмотрим случайную величину

$$Z_\theta(t_1, t_2) = \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} |Lz(t, \cdot)|_\theta. \quad (3.14)$$

ЛЕММА 3.4. Предположим, что для некоторого $\rho > 0$ выполнено условие (2.1). Тогда для любого $\theta \in (0, \rho)$ найдутся положительные константы σ и C такие, что

$$\mathbf{E} \exp(\sigma Z_\theta^2(t_1, t_2)/\ell(t_2 - t_1)) \leq C, \quad t_1 < t_2, \quad (3.15)$$

где $\ell(r) = r(1+r)^2$. При этом константы σ , C не зависят от t_1 , t_2 и ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Выведем сначала оценку для функции распределения $P\{Z_\theta > K\}$. Из (3.1) следует, что

$$\begin{aligned} e^{\theta L^{1/2}} Lz(t) &= \int_{t_1}^t e^{\theta L^{1/2}} L e^{-\nu(t-s)L} d\zeta(s) \\ &= e^{\theta L^{1/2}} L(\zeta(t) - \zeta(t_1)) - \nu \int_{t_1}^t e^{-\nu(t-s)L} M(s) ds, \end{aligned}$$

где $M(t) := e^{\theta L^{1/2}} L^2(\zeta(t) - \zeta(t_1))$. Поэтому

$$\begin{aligned} |Lz(t, \cdot)|_\theta &= |e^{\theta L^{1/2}} Lz(t)| \leq |e^{\theta L^{1/2}} L(\zeta(t) - \zeta(t_1))| + \nu \int_{t_1}^{t_2} |M(s)| ds \\ &\leq (1+T) \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} |M(t)|, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $T = t_2 - t_1$ и мы использовали неравенство $|Lu| \geq |u|$, $u \in H^2$. Заметим теперь, что если положительная константа σ' настолько мала, что

$$8\sigma' \max_{j \in \mathbb{Z}_0^2} (|j|^8 b_j^2 \exp(2\theta|j|)) \leq 1,$$

то

$$\mathbf{E} \exp(\sigma' |M(t)|^2/T) \leq c \quad \text{при } t_1 \leq t \leq t_2, \quad (3.17)$$

где константа $c > 0$ не зависит от t_1 и t_2 . Поэтому случайный процесс

$$\xi(t) := \exp(\sigma' |M(t)|^2/T),$$

определенный на отрезке $[t_1, t_2]$, является субмартингалом, так как он представим в виде композиции возрастающей выпуклой функции $f(r) = \exp(\sigma' r^2/T)$ и нормы непрерывного H -значного мартингала $M(t)$ (см. [2; предложение 3.7]). Следовательно, по неравенству Дуба–Колмогорова (см. [11; теорема III.3.4]) имеем

$$\begin{aligned} P\left\{ \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} |M(t)| \geq K \right\} &= P\left\{ \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \xi(t) \geq \exp(\sigma' K^2/T) \right\} \\ &\leq \exp(-\sigma' K^2/T) \mathbf{E} \xi(t_2) \leq c \exp(-\sigma' K^2/T), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где мы использовали оценку (3.17). Сопоставляя это неравенство с (3.16), получим

$$P\{Z_\theta > K\} \leq P\left\{ \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} |M(t)| \geq \frac{K}{1+T} \right\} \leq c \exp\left(-\frac{\sigma' K^2}{\ell(T)}\right). \quad (3.19)$$

2) Докажем теперь (3.15). Если $\sigma < \sigma'$, то ввиду (3.19) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{\sigma Z_\theta^2/\ell(T)} &= \int_0^\infty P\{e^{\sigma Z_\theta^2/\ell(T)} > y\} dy \\ &\leq 10 + \int_{10}^\infty P\left\{Z_\theta > \left(\frac{\ell(T) \log y}{\sigma}\right)^{1/2}\right\} dy \\ &\leq 10 + c \int_{10}^\infty \exp\left(-\frac{\sigma' \log y}{\sigma}\right) dy < \infty, \end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы.

Шаг 4. Нам понадобится следующая оценка для нелинейного члена $B(u, v)$.

ЛЕММА 3.5. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая константа $C = C(\varepsilon) > 0$, что

$$|(B(u, v), Lw)_\theta| \leq C \|u\|_\theta^{1-\varepsilon} |Lu|_\theta^\varepsilon \|v\|_\theta |Lw|_\theta, \quad (3.20)$$

где θ – неотрицательная константа, а u, v, w – произвольные вектор-функции на торе $\mathbb{T}^2$, для которых конечны нормы в правой части (3.20).

Для вывода неравенства (3.20) достаточно повторить рассуждения, использованные в [5] при доказательстве леммы 2.1. Мы не будем останавливаться на доказательстве леммы 3.5.

Шаг 5. Зафиксируем теперь произвольные $\delta \in (0, 1]$, $\tau > 0$, $t_0 \geq \tau$, $T > 0$ и рассмотрим решение $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2) с $u_0 = u_0^\nu$. Запишем u в виде (1.7), где процесс $z(t, x)$ определен по формуле (3.1), и предположим, что для некоторого семейства положительных случайных величин $r_\nu \leq \rho/2$ мы доказали, что

$$D_\nu(t_0, T) := \sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + T} \|\exp(r_\nu \nu^{2+\delta} L^{1/2}) v(t, \cdot)\| < \infty \text{ почти наверное,} \quad (3.21)$$

и что выполнены утверждения (i), (ii) теоремы 2.1 с заменой C_ν на D_ν . Тогда

$$C_\nu(t_0, T) \leq Z_{\rho/2}(t_0, T) + D_\nu(t_0, T).$$

Более того, принимая во внимание лемму 3.4, заключаем, что справедливы утверждения (i), (ii). Таким образом, достаточно установить упомянутые выше утверждения для D_ν .

Функция $v(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.8), которое является УрЧП типа Навье–Стокса со случайными коэффициентами. Полученные ниже оценки для функции v основаны на некоторых формальных вычислениях, которые легко обосновываются с помощью галеркинских приближений (см. [15]). Зафиксируем произвольное $s \in [t_0 - \tau, t_0 + T]$ и определим функцию $\varphi_s(t)$ по формуле (3.4):

$$\varphi_s(t) = \|v(t, \cdot)\|_{t-s}^2 + 1 = (e^{(t-s)L^{1/2}} v, e^{(t-s)L^{1/2}} Lv) + 1. \quad (3.22)$$

Мы сейчас выведем дифференциальное неравенство для φ_s . Ввиду уравнения (1.8) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_s(t) &= 2(e^{(t-s)L^{1/2}} \dot{v}, e^{(t-s)L^{1/2}} Lv) + 2(e^{(t-s)L^{1/2}} L^{1/2} v, e^{(t-s)L^{1/2}} Lv) \\ &= -2\nu |Lv|_\theta^2 + 2(B(z + v, z + v), Lv)_\theta + 2|L^{3/4} v|_\theta^2, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где для упрощения обозначений мы положили $\theta = t - s$. Пусть $\varepsilon := \delta/(3 + \delta)$, так что $\frac{2 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = 2 + \delta$ и $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Используя неравенство $|z|_\theta \leq \|z\|_\theta \leq |Lz|_\theta \leq Z_\theta$ (см. (3.14)) и лемму 3.5, получаем следующие оценки для второго слагаемого правой части (3.23):

$$\begin{aligned} |(B(z, z), Lv)_\theta| &\leq C |Lv|_\theta \|z\|_\theta^{2-\varepsilon} |Lz|_\theta^\varepsilon \leq C Z_\theta^2 |Lv|_\theta, \\ |(B(v, z), Lv)_\theta| &\leq C |Lv|_\theta^{1+\varepsilon} \|v\|_\theta^{1-\varepsilon} \|z\|_\theta \leq C Z_\theta |Lv|_\theta^{1+\varepsilon} \|v\|_\theta^{1-\varepsilon}, \\ |(B(z, v), Lv)_\theta| &\leq C |Lv|_\theta \|v\|_\theta \|z\|_\theta^{1-\varepsilon} |Lz|_\theta^\varepsilon \leq C Z_\theta |Lv|_\theta \|v\|_\theta, \\ |(B(v, v), Lv)_\theta| &\leq C |Lv|_\theta^{1+\varepsilon} \|v\|_\theta^{2-\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где через C обозначается положительная константа, зависящая только от ε . Последнее слагаемое в правой части (3.23) оценивается следующим образом:

$$2|L^{3/4}v|_\theta^2 \leq 2\|v\|_\theta |Lv|_\theta \leq \nu |Lv|_\theta^2 + \nu^{-1}\|v\|_\theta^2. \quad (3.25)$$

Подставляя неравенства (3.24), (3.25) в (3.23) и предполагая, что

$$t_0 - \tau \leq s \leq t_0 + T, \quad s \leq t \leq (s + \rho/2) \wedge (t_0 + T), \quad (3.26)$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_s &\leq -\nu |Lv|_\theta^2 + \nu^{-1}\|v\|_\theta^2 + C |Lv|_\theta (Z_\theta \|v\|_\theta + Z_\theta^2) + C |Lv|_\theta^{1+\varepsilon} (Z_\theta \|v\|_\theta^{1-\varepsilon} + \|v\|_\theta^{2-\varepsilon}) \\ &\leq \nu^{-1}\|v\|_\theta^2 + C_1 \nu^{-1} (Z_\theta \|v\|_\theta + Z_\theta^2)^2 + C_2 \nu^{-\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} (Z_\theta \|v\|_\theta^{1-\varepsilon} + \|v\|_\theta^{2-\varepsilon})^{\frac{2}{1-\varepsilon}} \\ &\leq A_\varepsilon \nu^{-\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} (\|v\|_\theta^2 + 1)^{\frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где $A_\varepsilon > 0$ – семейство случайных констант таких, что

$$A_\varepsilon \leq C_3(\varepsilon) (Z_{\rho/2}^4(t_0 - \tau, t_0 + T) + 1). \quad (3.28)$$

Таким образом, для указанных в (3.26) значений параметров функция φ_s удовлетворяет дифференциальному неравенству (3.5). Решая его и вспоминая, что $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, $\frac{2+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 2 + \delta$, получим

$$\begin{aligned} \varphi_s(t) &\leq \varphi_s(s) (1 - 2\nu^{-\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} A_\varepsilon \varphi_s(s)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (t-s))^{-(1-\varepsilon)} \\ &\leq \varphi_s(s) (1 - 2\nu^{-(2+\delta)} A_\varepsilon (1 + \nu \varphi_s(s))^2 (t-s))^{-1}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Заметим теперь, что в силу (3.3), (3.4), (3.10) и (3.14) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_s(s) &= \|v(s)\|^2 + 1 \leq \|u(s)\|^2 + \|z(s)\|^2 + 1 \\ &\leq U(t_1, t_2) + Z_0^2(t_1, t_2) + 1 =: R_\nu(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (3.30)$$

где $t_1 = t_0 - \tau$, $t_2 = t_0 + T$. Положим

$$r_\nu = (4A_\varepsilon(1 + \nu R_\nu)^2)^{-1} \wedge (\rho/2) \wedge \tau. \quad (3.31)$$

Первое неравенство в (2.4) следует из (3.28) и лемм 3.3, 3.4. Кроме того, если

$$t - s = r_\nu \nu^{2+\delta} \leq (4\nu^{-(2+\delta)} A_\varepsilon (1 + \nu \varphi_s(s))^2)^{-1},$$

то из неравенства (3.29) вытекает оценка

$$\|v(t)\|_{r_\nu \nu^{2+\delta}}^2 \leq \varphi_s(t) \leq 2\varphi_s(s) \leq 2R_\nu(t_1, t_2). \quad (3.32)$$

Таким образом, имеем $D_\nu(t_0, T) \leq 2R_\nu(t_1, t_2)$. Сопоставляя эту оценку с леммами 3.3, 3.4, получим второе неравенство в (2.4). Теорема 2.1 полностью доказана.

3.2. Доказательство теоремы 2.2. Пусть μ – распределение решения $v(t, x)$. Мы должны проверить, что

$$\mathbb{E} \exp(\sigma \nu \|v(t, \cdot)\|^2) = \int_H \exp(\sigma \nu \|u\|^2) \mu(du) \leq C, \quad (3.33)$$

где σ, C – положительные константы, не зависящие от ν, v .

Напомним, что через $P_t(u, \Gamma)$ обозначается переходная функция, ассоциированная с уравнением (1.1). По определению любое решение принадлежит пространству H с вероятностью 1 и поэтому $\mu(H) = 1$. Так как μ – стационарная мера, то из (1.9) следует, что

$$\mu(V) = \int_H P_t(u, V) \mu(du) = \mu(H) = 1, \quad t > 0. \quad (3.34)$$

Зафиксируем теперь $R > 0$ и определим непрерывный функционал $f_R(u)$ на пространстве V по формуле

$$f_R(u) = \begin{cases} e^{\sigma \nu \|u\|^2} & \text{при } \|u\| \leq R, \\ e^{\sigma \nu R^2} & \text{при } \|u\| > R. \end{cases}$$

Из леммы 3.1 следует, что

$$\int_H P_t(u, dv) f_R(v) \leq \int_H P_t(u, dv) e^{\sigma \nu \|v\|^2} \leq e^{-\sigma \nu (t - \|u\|^2)} + C \leq e^{-\sigma \nu (t - r^2)} + C, \quad (3.35)$$

где $u \in V$, $\|u\| \leq r$, $t \geq 0$, а константа $C > 0$ зависит только от правой части уравнения (1.1). Так как $\mu(du)$ – стационарное распределение, то

$$\begin{aligned} \int_H f_R(u) \mu(du) &= \int_H \mu(du) \int_H P_t(u, dv) f_R(v) \\ &= \int_H (I_{Q_r}(u) + I_{Q_r^c}(u)) \mu(du) \int_H P_t(u, dv) f_R(v), \end{aligned} \quad (3.36)$$

где для любого $r > 0$ через I_{Q_r} и $I_{Q_r^c}$ обозначаются характеристические функции множества $Q_r = \{u \in H : \|u\| < r\}$ и его дополнения соответственно. Ввиду неравенства (3.35) правая часть (3.36) оценивается сверху выражением

$$\begin{aligned} \int_H I_{Q_r}(u) (e^{-\sigma \nu (t - r^2)} + C) \mu(du) + \int_H I_{Q_r^c}(u) e^{\sigma \nu R^2} \mu(du) \\ \leq e^{-\sigma \nu (t - r^2)} + C + e^{\sigma \nu R^2} \mu(Q_r^c). \end{aligned}$$

Устремляя t к бесконечности, из (3.36) получим

$$\int_H f_R(u) \mu(du) \leq C + e^{\sigma \nu R^2} \mu(Q_r^c).$$

Переходя к пределу при $r \rightarrow \infty$ и принимая во внимание соотношение (3.34), приходим к неравенству

$$\int_H f_R(u) \mu(du) \leq C.$$

Требуемое неравенство (2.6) вытекает теперь из теоремы о монотонной сходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Bricmont, A. Kupiainen, R. Lefevere. Probabilistic estimates for the two-dimensional stochastic Navier–Stokes equations // J. Statist. Phys. 2000. V. 100. № 3–4. P. 743–756.
- [2] G. Da Prato, J. Zabczyk. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. (Encyclopedia Math. Appl. V. 44.)
- [3] G. Da Prato, J. Zabczyk. Ergodicity for Infinite-Dimensional Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
- [4] F. Flandoli, D. Gatarek. Martingale and stationary solutions for stochastic Navier–Stokes equations // Probab. Theory Related Fields. 1995. V. 102. № 3. P. 367–391.
- [5] C. Foias, R. Temam. Gevrey class regularity for the solutions of the Navier–Stokes equations // J. Funct. Anal. 1989. V. 87. № 2. P. 359–369.
- [6] У. Фриш. Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова. М.: Фазис, 1998.
- [7] G. Gallavotti. Foundations of Fluid Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
- [8] Y. Giga. Time and spatial analyticity of solutions of the Navier–Stokes equations // Comm. Partial Differential Equations. 1983. V. 8. № 8. P. 929–948.
- [9] W. D. Henshaw, H.-O. Kreiss, L. G. Reyna. Smallest scale estimates for the Navier–Stokes equations for incompressible fluids // Arch. Ration. Mech. Anal. 1990. V. 112. № 1. P. 21–44.
- [10] G. Komatsu. Global analyticity up to the boundary of solutions of the Navier–Stokes equation // Comm. Pure Appl. Math. 1980. V. 33. № 4. P. 545–566.
- [11] N. V. Krylov. Introduction to the Theory of Diffusion Processes. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. (Transl. Math. Monographs. V. 142.)
- [12] I. Kukavica. On the dissipative scale for the Navier–Stokes equation // Indiana Univ. Math. J. 1999. V. 48. № 3. P. 1057–1081.
- [13] S. B. Kuksin. Spectral properties of solutions for nonlinear PDEs in the turbulent regime // Geom. Funct. Anal. 1999. V. 9. № 1. P. 141–184.
- [14] С. Б. Куksин. Стохастическое нелинейное уравнение Шредингера. I. Априорные оценки // Труды МИАН. 1999. Т. 225. С. 232–256.
- [15] Ж.-Л. Лионс. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
- [16] K. Masuda. On the analyticity and the unique continuation theorem for solutions of the Navier–Stokes equations // Proc. Japan Acad. 1967. V. 43. P. 827–832.
- [17] J. C. Mattingly. The Stochastic Navier–Stokes Equation: Energy Estimates and Phase Space Contraction // Ph.D. thesis. Princeton: Princeton Univ., 1998.
- [18] М. И. Вишик, А. В. Фурсиков. Математические задачи статистической гидромеханики. М.: Наука, 1980.
- [19] М. И. Вишик, А. И. Комеч, А. В. Фурсиков. Некоторые математические задачи статистической гидромеханики // УМН. 1979. Т. 34. № 5. С. 135–210.

Heriot-Watt University, Edinburgh, Scotland, UK
E-mail: A.Shirikyan@ma.hw.ac.uk

Поступила в редакцию
 05.04.2002