Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Горбатов, А. А. Нечаев, Циклические семейства полилинейных рекуррент над квазифробениусовыми модулями, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm537>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 18:12:48

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ЦИКЛИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ПОЛИЛИНЕЙНЫХ
РЕКУРРЕНТ НАД КВАЗИФРОБЕНИУСОВЫМИ МОДУЛЯМИ

Е. В. ГОРБАТОВ, А. А. НЕЧАЕВ

Пусть ${}_R M$ — точный модуль над коммутативным артиновым кольцом R с единицей. Назовем функцию $\mu: \mathbb{N}_0^k \rightarrow M$, $k \in \mathbb{N}$, k -последовательностью над M : $\mu = \mu(\mathbf{z})$, где $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_k)$ — набор переменных над $\mathbb{N}_0$. Множество $M^{(k)}$ всех k -последовательностей над M есть R -модуль относительно обычных операций над функциями.

Пусть $\mathcal{R}_k = R[x_1, \dots, x_k] = R[\mathbf{x}]$ — кольцо многочленов от k переменных. Для набора $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{N}_0^k$ положим $\mathbf{x}^{\mathbf{s}} = x_1^{s_1} \cdots x_k^{s_k}$. Определим умножение последовательности $\mu \in M^{(k)}$ на многочлен $F(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s}} f_{\mathbf{s}} \mathbf{x}^{\mathbf{s}} \in \mathcal{R}_k$ равенством $F(\mathbf{x})\mu = \nu \in M^{(k)}$, $\nu(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{s}} f_{\mathbf{s}} \mu(\mathbf{z} + \mathbf{s})$. Тогда $M^{(k)}$ становится $\mathcal{R}_k$ -модулем. Аннулятор $\text{An}(\mathcal{M}) = \text{An}_{\mathcal{R}_k}(\mathcal{M}) = \{F(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}_k \mid F(\mathbf{x})\mathcal{M} = 0\}$ подмножества $\mathcal{M} \subset M^{(k)}$ в кольце $\mathcal{R}_k$ есть идеал $\mathcal{R}_k$.

Идеал I из $\mathcal{R}_k$ назовем унитарным, если существуют унитарные многочлены $F_1(x), \dots, F_k(x) \in R[x]$ (от одной переменной) такие, что $F_1(x_1), \dots, F_k(x_k) \in I$. Последнее условие равносильно тому, что факторкольцо $S = \mathcal{R}_k/I$ конечно порождено как R -модуль (R -к.п.-модуль). Скажем, что $\mu \in M^{(k)}$ есть k -линейная рекуррентная последовательность (k -ЛРП) над модулем ${}_R M$, если $I = \text{An}(\mu)$ — унитарный идеал. Если $I \triangleleft \mathcal{R}_k$ — унитарный идеал, то аннулятор $L_M(I) = \text{An}_{M^{(k)}} I$ называется k -ЛРП-семейством над ${}_R M$. Если R — поле, то $L_M(I)$ — циклический $\mathcal{R}_k$ -модуль. В настоящей заметке дается обобщение этого результата.

Модуль ${}_R M$ называется квазифробениусовым (QF -модулем), если для всех $J \triangleleft R$ и $K < R$ выполняются соотношения $\text{An}_R(\text{An}_M(J)) = J$ и $\text{An}_M(\text{An}_R(K)) = K$. Для R существует единственный с точностью до изоморфизма QF -модуль ${}_R Q$ [1]. Кольцо R называется квазифробениусовым (QF -кольцом), если ${}_R R$ есть QF -модуль.

ТЕОРЕМА 1 ([2], [3]). Пусть ${}_R Q$ — QF -модуль и $I \subseteq \mathcal{R}_k$ — унитарный идеал. Тогда семейство $\mathcal{M} = L_Q(I)$ есть QF -модуль над коммутативным артиновым кольцом $S = \mathcal{R}_k/I$ и следующие условия эквивалентны:

- (а) $I = \text{An}(\mu)$ для некоторой рекуррентной $\mu \in \mathcal{L}Q^{(k)}$;
- (б) $\mathcal{M}$ — циклический $\mathcal{R}_k$ -модуль;
- (в) S — квазифробениусово кольцо.

Заметим, что нильрадикал $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(R)$ кольца R есть множество всех нильпотентных элементов R : $\mathfrak{N}(R) = \sqrt{0}$ и для любого идеала $I \triangleleft \mathcal{R}_k$ выполнены соотношения: $\mathfrak{N}\mathcal{R}_k \subset \sqrt{I}$, $\mathfrak{N}(I : \sqrt{I}) \subset I$. Поэтому мы можем рассматривать R -модули $\mathcal{R}_k/\sqrt{I}$ и $(I : \sqrt{I})/I$ как модули над факторкольцом $\overline{R} = R/\mathfrak{N}$. Ввиду этого корректно определены модули в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. *При условиях теоремы 1 каждое из свойств (а)–(в) равносильно изоморфизму*

$$\overline{R}(\mathcal{R}_k/\sqrt{I}) \cong \overline{R}((I : \sqrt{I})/I). \quad (1)$$

Эта теорема есть обобщение результатов работ [4], [5], где доказано, что условие (а) теоремы 1 эквивалентно соотношению

$$\dim_{\overline{R}}(\mathcal{R}_k/\sqrt{I}) = \dim_{\overline{R}}((I : \sqrt{I})/I) \quad (2)$$

в случае, если $k = 1$ и R – локальное кольцо главных идеалов (т.е. $Q = R$) или когда k произвольно и R – поле.

Доказательство теоремы 2 намного короче, чем доказательство соответствующих результатов в [4], [5], так как использует хорошо известные свойства QF-колец. Достаточно показать, что (1) эквивалентно условию (в) из теоремы 1. Напомним, что *цоколь* кольца $S = \mathcal{R}_k/I$ определяется как сумма $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(S)$ всех минимальных идеалов S и удовлетворяет равенству $\mathfrak{S}(S) = \text{An}_S \mathfrak{N}(S)$ (см. [6; теорема 9.3.5]). Поскольку S -модули $\overline{S}$ и $\mathfrak{S}(S)$ аннулируются $\mathfrak{N}(S)$, мы можем рассматривать их как $\overline{S}$ -модули. Нам потребуется следующий критерий.

ТЕОРЕМА 3 (см. [6; следствие 13.4.3]). *Коммутативное артиново кольцо S квазифробениусово тогда и только тогда, когда существует изоморфизм $\overline{S}\overline{S} \cong \overline{S}\mathfrak{S}(S)$.*

Нетрудно увидеть, что при наших условиях

$$\mathfrak{N}(S) = \sqrt{I}/I, \quad \overline{S} \cong \mathcal{R}_k/\sqrt{I}, \quad \mathfrak{S}(S) = (I : \sqrt{I})/I. \quad (3)$$

Как уже было отмечено, мы можем рассматривать $\overline{S}$ -модули $\overline{S}$ и $\mathfrak{S}(S)$ и как $\overline{R}$ -модули. Это также следует из естественного вложения $R \subset S$ и равенства $\mathfrak{N}(R) = \mathfrak{N}(S) \cap R$, которое влечет включение $\overline{R} \subset \overline{S}$. Теперь ввиду (3) и теоремы 3 остается доказать импликацию $\overline{R}\overline{S} \cong \overline{R}\mathfrak{S}(S) \Rightarrow \overline{S}\overline{S} \cong \overline{S}\mathfrak{S}(S)$.

ЛЕММА 4. *Для любого коммутативного артинова кольца S существует мономорфизм $\overline{S}$ -модулей $\phi: \overline{S} \rightarrow \mathfrak{S}(S)$.*

Для доказательства этой леммы достаточно заметить, что сформулированное утверждение верно для локальных колец (в этом случае $\overline{S}$ – поле), а любое коммутативное артиново кольцо изоморфно сумме локальных колец.

Теперь заметим, что $\overline{S}$ – конечно порожденный $\overline{R}$ -модуль и, следовательно, модуль $\overline{R}\overline{S}$ имеет конечную длину. Если $\overline{R}\overline{S} \cong \overline{R}\mathfrak{S}(S)$, то модуль $\overline{R}\mathfrak{S}(S)$ имеет ту же длину и, следовательно, мономорфизм из леммы 4 является изоморфизмом.

Авторы выражают благодарность А. В. Михалёву за помощь при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. Фейс. Алгебра. Т. 2. М.: Мир, 1979. [2] V. L. Kurakin, A. S. Kuzmin, A. V. Mikhalev, A. A. Nechaev // J. Math. Sci. 1995. V. 76. № 6. P. 2793–2915. [3] A. A. Nechaev // Proceedings of the First International Taiwan–Moscow Algebra Workshop, Taiwan, 1994. Berlin: de Gruyter, 1996. P. 283–298. [4] P. Z. Lu, M. L. Liu // Algebra Colloq. 1999. V. 6. № 3. P. 349–360. [5] P. Z. Lu // Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. 2000. V. 11. № 2. P. 141–156. [6] Ф. Каш. Модули и кольца. М.: Мир, 1981.

Принято редколлегией
23.05.2002