Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гришин, О показателе представимости многообразия ассоциативных алгебр, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm538>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:03:10

О ПОКАЗАТЕЛЕ ПРЕДСТАВИМОСТИ МНОГООБРАЗИЯ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

А. В. Гришин

Пусть k – бесконечное поле произвольной характеристики, k_r – алгебра $(r \times r)$ -матриц и $\mathfrak{M}$ – многообразие ассоциативных алгебр над полем k . С каждым таким многообразием связаны такие числовые характеристики: *сложность* – натуральное число r , для которого $k_r \in \mathfrak{M}$, $k_{r+1} \notin \mathfrak{M}$, и *кратность* – индекс нильпотентности радикала относительно свободной счетно-порожденной алгебры $\overline{F}$ этого многообразия. Для удобства все рассматриваемые алгебры предполагаются с единицей, а многообразия унитарно замкнутыми.

Наша цель – ввести еще один важный, как представляется, показатель многообразия $\mathfrak{M}$. Будем называть многообразие $\mathfrak{M}$ *представимым*, если его алгебра $\overline{F}$ вкладывается в конечномерную алгебру над некоторым расширением поля k . Если k – алгебраически замкнутое поле бесконечной степени трансцендентности над своим простым подполем, то представимость, как известно, равносильна равенству $\mathfrak{M} = \text{Var}(A)$, где A – некоторая конечномерная алгебра из $\mathfrak{M}$.

Пусть Ω – произвольное расширение поля k ,

$$F = k \langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle \quad \text{и} \quad \Omega F = \Omega k \langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$$

– свободные счетно-порожденные ассоциативные алгебры над полями F и Ω . Обозначим через $\mathfrak{M}^\Omega$ многообразие Ω -алгебр, заданное тем же набором тождеств, что и $\mathfrak{M}$.

Всюду ниже сложность многообразия $\mathfrak{M}$ предполагается равной r . Положим

$$L_n^\Omega = \underbrace{\Omega_r \oplus \dots \oplus \Omega_r}_n \oplus \dots \oplus \underbrace{\Omega \oplus \dots \oplus \Omega}_n$$

и рассмотрим свободные над Ω произведения

$$L_n^\Omega \langle x_1, \dots, x_n \rangle = L_n^\Omega * \Omega \langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle, \quad n = 1, 2, \dots,$$

т.е. алгебры обобщенных L_n^Ω -многочленов от n переменных. Рассмотрим, далее, фактор-алгебры

$$R_n^\Omega = L_n^\Omega \langle x_1, \dots, x_n \rangle / (x_1, \dots, x_n)^n,$$

которые, очевидно, конечномерны и, в частности, $R_1^\Omega = L_1^\Omega = \Omega$. При $k = \Omega$ положим $R_n = R_n^k$. Пусть S – произвольное множество многочленов из F (например, S – T -идеал). Обозначим через $(S)_n^\Omega$ вербальный идеал алгебры R_n^Ω , порожденный множеством S . Положим $R_n^\Omega(S) = R_n^\Omega / (S)_n^\Omega$, $R_n(S) = R_n^k(S)$. Ясно, что $R_n^\Omega(S)$ лежит в многообразии, заданном системой тождеств S . Из бесконечности поля k прямо следует

ЛЕММА. Если I – T -идеал тождеств алгебры $R_n(S)$ в алгебре F , то ΩI – T -идеал тождеств алгебры $R_n^\Omega(S)$ в алгебре ΩF , причем $I_1 = I_2$ тогда и только тогда, когда $\Omega I_1 = \Omega I_2$ (где I_1, I_2 – T -идеалы алгебры F).

ТЕОРЕМА. Следующие утверждения эквивалентны.

- (1) Многообразие $\mathfrak{M}$, заданное системой S , представимо.
- (2) Существует такое натуральное n_0 , что

$$\text{Var}(R_{n_0}(S)) = \text{Var}(R_{n_0+1}(S)) = \dots$$

- (3) Существует такое натуральное n_0 , что $\mathfrak{M} = \text{Var}(R_{n_0}(S))$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Если многообразие $\mathfrak{M}$ – представимо, то в силу сказанного выше для некоторого алгебраически замкнутого расширения Ω поля k и для некоторой конечномерной Ω -алгебры A имеет место равенство $\mathfrak{M}^\Omega = \text{Var}(A)$. Следовательно, для некоторого натурального n_0 существует сюръективный гомоморфизм алгебры $R_{n_0}^\Omega(S)$ на алгебру A . Тогда, очевидно,

$$\text{Var}(A) = \text{Var}(R_{n_0}^\Omega(S)) = \text{Var}(R_{n_0+1}^\Omega(S)) = \dots$$

В силу леммы

$$\text{Var}(R_{n_0}(S)) = \text{Var}(R_{n_0+1}(S)) = \dots$$

Ясно, что алгебры $R_{n_0}(S)$, $R_{n_0+1}(S)$, $\dots$ порождают многообразие $\mathfrak{M}$ (это следует из возможности аппроксимировать алгебру $\overline{F}$ конечномерными алгебрами). Следовательно,

$$\mathfrak{M} = \text{Var}(R_{n_0}(S)) = \text{Var}(R_{n_0+1}(S)) = \dots$$

Если $\mathfrak{M} = \text{Var}(A)$, где A – некоторая конечномерная k -алгебра, то $\overline{F}$ – алгебра общих элементов алгебры A , что и позволяет осуществить вложение алгебры $\overline{F}$ в конечномерную алгебру над некоторым расширением поля k .

СЛЕДСТВИЕ. В случае бесконечного поля представимость многообразия $\mathfrak{M}$ равносильна равенству $\mathfrak{M} = \text{Var}(A)$, где A – некоторая конечномерная алгебра из $\mathfrak{M}$.

Наименьшее натуральное n_0 из приведенной выше теоремы назовем *показателем представимости* $\rho(S) = \rho(\mathfrak{M})$ многообразия $\mathfrak{M}$, а конечномерные алгебры $R_{n_0}(S)$, $R_{n_0+1}(S)$, $\dots$ – *модельными алгебрами* этого многообразия.

Ясно, что кратность многообразия $\mathfrak{M}$ не превосходит $\rho(S)$, что показывает важную роль показателя представимости данного многообразия. Зная показатель представимости, можно построить модельную алгебру многообразия. Однако само отыскание числа $\rho(S)$ – весьма трудная задача.

Из результатов Левина [1] следует, что если M_r – идеал тождеств алгебры k_r , то

$$\rho(M_{r_1} \cdots M_{r_l}) = l.$$

Если c_n – многочлен Капелли порядка n , то при $n \geq 4$ в случае поля нулевой характеристики оценка показателя $\rho(c_n)$ – интересная и важная задача, решение которой еще впереди.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Lewin // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 188. №2. P. 293–317.

Московский педагогический
государственный университет

Принято редколлегией
23.05.2002