Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Э. Гутерман, Линейные отображения, сохраняющие определитель Дьедонне над произвольным телом, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm539>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:23:58

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ДЪЕДОННЕ НАД ПРОИЗВОЛЬНЫМ ТЕЛОМ

А. Э. ГУТЕРМАН

Задача классификации линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, восходит к работе Георга Фробениуса [1], где получена характеристика линейных биективных преобразований пространства матриц над полем комплексных чисел, сохраняющих определитель. На протяжении прошедшего века эта теория интенсивно развивалась. В последние годы были получены существенные продвижения для матриц над коммутативными кольцами, см. [2]. В случае некоммутативного кольца коэффициентов полулинейные отображения матриц над полупростыми артиновыми кольцами, конечно порожденными как модули над коммутативными кольцами, содержащими более двух элементов, сохраняющие вырожденность, были охарактеризованы Уонгом в [3]. Однако вопрос о некоммутативном аналоге теоремы Фробениуса (задача классификации полулинейных отображений, сохраняющих определитель Дъедонне, см. [4]) оставался открытым даже для матриц над телами. В работах [5], [6] были классифицированы полулинейные отображения матриц над телами и локальными кольцами, удовлетворяющими некоторым техническим условиям, сохраняющие определитель Дъедонне. Целью настоящей заметки является решение указанной проблемы для матриц с коэффициентами из произвольного тела.

Пусть D – некоммутативное тело, являющееся алгеброй над некоторым полем K , множество $K \cdot 1_D$ содержит более двух различных элементов, $M_n(D)$ – множество $(n \times n)$ -матриц с коэффициентами из тела D .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для произвольных матриц $A, B \in M_n(D)$ обозначим

$$l(A, B) = \{\lambda \in K \mid \lambda A + B \text{ — вырожденная матрица}\}.$$

ЛЕММА 1. Пусть матрица $A \in M_n(D)$, $\text{rk}(A) \leq 1$. Тогда для произвольной матрицы $B \in M_n(D)$ или $l(A, B) = K$, или $|l(A, B) \cdot 1_D| \leq 1$.

Для доказательства рассматривается произвольная матрица $B \in M_n(D)$ и предполагается, что $|l(A, B) \cdot 1_D| > 1$, т.е. существуют различные элементы $\lambda_1, \lambda_2 \in l(A, B)$. Тогда этим элементам отвечают элементы $0 \neq v_i \in \text{Ker}(\lambda_i A + B)$, $i = 1, 2$. Если $v_i \in \text{Ker}(A)$, $i = 1, 2$, то из линейности следует, что $v_i \in \text{Ker}(B)$. Тогда $(\lambda A + B)v_i = 0$ для всех $\lambda \in K$ и $l(A, B) = K$. Если $Av_1 \neq 0$ и $Av_2 \neq 0$, то $\text{rk}(A) = 1$. Тогда существует $0 \neq \mu \in D$ такой, что $Av_2 = (Av_1)\mu$. Для произвольного элемента $\lambda \in K$ рассматривается элемент v_λ , определяемый следующим образом: $v_\lambda = v_1\mu(\lambda - \lambda_2) + v_2(\lambda_1 - \lambda)$. Непосредственная проверка показывает, что $v_\lambda \in \text{Ker}(\lambda A + B)$. Следовательно, $l(A, B) = K$.

ЛЕММА 2. Для произвольной матрицы $A \in M_n(D)$ такой, что $\text{rk}(A) > 1$, существует такая матрица $B \in M_n(D)$, что $l(A, B) \cdot 1_D = \{0_D, 1_D\}$.

Для доказательства матрица A рассматривается как линейный оператор, действующий на пространстве столбцов длины n элементов из D . Тогда $D^n \cong \text{Im}(A) \oplus W \cong U \oplus \text{Ker}(A)$, $\dim(U) = \dim(\text{Im}(A)) = \text{rk}(A) > 1$. Фиксируется вектор $0 \neq u_1 \in U$ и рассматривается разложение $U_1 = u_1 D$, $U = U_1 \oplus U_2$. Тогда $U_2 \neq \{0\}$. Определяются операторы $B_1: U \rightarrow \text{Im}(A)$ через $B_1 u_1 = -A u_1$, $B_1|_{U_2} = 0$ и $B_2: \text{Ker}(A) \rightarrow W$ – произвольный изоморфизм векторных пространств. Непосредственная проверка показывает, что матрица оператора $B = B_1 \oplus B_2: D^n \rightarrow D^n$ удовлетворяет всем требуемым условиям.

Непосредственным следствием лемм 1 и 2 является следующая характеристика матриц ранга 1.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

СЛЕДСТВИЕ 1. Матрица $A \in M_n(D)$ имеет ранг, не больший единицы, тогда и только тогда, когда для любой матрицы $B \in M_n(D)$ или $l(A, B) = K$, или $|l(A, B) \cdot 1_D| \leq 1$.

В силу того, что для биективного σ -полулинейного отображения T справедливо $l(T(A), T(B)) = (l(A, B))^\sigma$, получим

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $T: M_n(D) \rightarrow M_n(D)$ – биективное, σ -полулинейное над K отображение, взаимно однозначное на множестве вырожденных матриц. Тогда отображение T взаимно однозначно на множестве матриц ранга 1.

Применение теоремы Хуа, см. [7], в которой охарактеризованы биективные аддитивные взаимно однозначные на множестве матриц ранга 1 отображения матриц с коэффициентами из тела, позволяет доказать следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть биективное, σ -полулинейное над K отображение $T: M_n(D) \rightarrow M_n(D)$ взаимно однозначно на множестве вырожденных матриц. Тогда существуют такие обратимые матрицы $P, Q \in M_n(D)$ и σ -полулинейный над K автоморфизм μ тела D , что $T(X) = PX^\mu Q$ для всех $X \in M_n(D)$ или $T(X) = P({}^t X^\mu)Q$ для всех $X \in M_n(D)$, причем матрицы P и Q определены единственным, с точностью до обратимого скалярного множителя, образом, μ – единственен с точностью до внутреннего автоморфизма тела D , здесь через ${}^t X$ обозначена транспонированная матрица к матрице X .

ТЕОРЕМА 2. Пусть сюръективное σ -полулинейное над K отображение $T: M_n(D) \rightarrow M_n(D)$ сохраняет определитель Дьедонне. Тогда существуют такие матрицы $P, Q \in M_n(D)$, $\det(PQ) = \bar{1}$, и σ -полулинейный над K автоморфизм μ тела D , что $T(X) = PX^\mu Q$ для всех $X \in M_n(D)$ или $T(X) = P({}^t X^\mu)Q$ для всех $X \in M_n(D)$, причем матрицы P и Q определены единственным, с точностью до обратимого скалярного множителя, образом, μ – единственен с точностью до внутреннего автоморфизма тела D .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Frobenius // Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin. 1897. P. 994–1015. [2] L. B. Beasley, C.-K. Li, S. Pierce // Linear and Multilinear Algebra. 1992. V. 33. № 1–2. P. 109–119. [3] W. J. Wong // J. Algebra. 1988. V. 113. № 2. P. 263–293. [4] J. Dieudonné // Bull. Soc. Math. France. 1943. V. 71. P. 27–45. [5] А. Э. Гутерман, Е. М. Крейнс, А. В. Михалев // Матем. методы и прил. 1997. Т. 5. С. 119–132. [6] А. Guterma // Linear and Multilinear Algebra. 2001. V. 48. № 4. P. 293–311. [7] L. K. Hua // J. Chinese Math. Soc. (N.S.). 1951. V. 1. P. 110–163.

Принято редколлегией
23.05.2002