Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Карпенков, О критерии существования и единственности целочисленного треугольника с заданными углами, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 6, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5395>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 18:32:29

О критерии существования и единственности целочисленного треугольника с заданными углами

О. Н. Карпенков

Проблема описания выпуклых целочисленных многоугольников в терминах целочисленных инвариантов является нерешенной. На настоящий момент известно только, что число выпуклых целочисленных многоугольников с ограниченной площадью n растет экспоненциально по $n^{1/3}$ (см. работы [1] и [2]). В этой заметке полностью исследован случай треугольников. Автор благодарен В.И. Арнольду, И. Барани и А.Г. Хованскому за внимание к этой работе и полезные замечания.

Общие определения. Рассмотрим двумерную ориентированную вещественную аффинную плоскость. Зафиксируем в этой плоскости некоторую систему координат OXY . Точка плоскости называется *целой*, если все ее координаты целые. Выпуклая оболочка конечного числа целых точек, не содержащихся в одной прямой, называется *целочисленным выпуклым многоугольником*. Рассмотрим минимальный набор точек, определяющий заданный многоугольник. Точки этого набора называются *вершинами* многоугольника. Поскольку все вершины лежат на границе выпуклой оболочки, их можно циклически упорядочить против или по ходу часовой стрелки: $A_1, \dots, A_n$. Назовем такие многоугольники *положительно-ориентированными* и *отрицательно-ориентированными* соответственно и обозначим $A_1 \dots A_n$.

Назовем *углом* упорядоченный набор двух замкнутых лучей с общей вершиной, не содержащихся в одной прямой. Лучи называются *сторонами угла*, а их общая вершина – *вершиной угла*. Угол называется *целочисленным*, если его вершина является целой, а обе стороны содержат целые точки, отличные от вершины. Углом $\angle ABC$ ориентированного целочисленного многоугольника с последовательными вершинами A , B и C называется целочисленный угол с вершиной B и сторонами BA и BC .

Аффинное преобразование плоскости называется *целочисленно-аффинным*, если оно сохраняет множество целых точек. Многоугольники $A_1 \dots A_n$ и $B_1 \dots B_n$ (углы $\angle A_1 A_2 A_3$ и $\angle B_1 B_2 B_3$) называются *целочисленно-эквивалентными*, если существует целочисленно-аффинное преобразование плоскости, переводящее точки A_i в B_i , где $i = 1, \dots, n$ (соответственно лучи $A_2 A_1$ и $A_2 A_3$ в лучи $B_2 B_1$ и $B_2 B_3$).

Для положительного целого n и точки $A(x, y)$ обозначим через nA точку с координатами (nx, ny) . Многоугольник $nA_0 \dots nA_k$ называется *n -гомотетичным* многоугольнику $P = A_0 \dots A_k$ и обозначается через nP . Многоугольники P_1 и P_2 называются *целочисленно-подобными*, если существуют целые положительные числа m_1 и m_2 такие, что $m_1 P_1$ целочисленно-эквивалентно $m_2 P_2$.

Конечные цепные дроби. Дополним множество рациональных чисел с операциями $+$ и $1/*$ элементом ∞ и обозначим: $\overline{\mathbb{Q}}$. Положим $q \pm \infty = \infty$, $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$ (выражения $0 \pm \infty$ не определены).

Любой конечной последовательности целых чисел $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ поставим в соответствие элемент $a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \dots + 1/(a_{n-1} + 1/a_n) \dots))$ множества $\overline{\mathbb{Q}}$ и обозначим его $]a_0, a_1, \dots, a_n[$. Если числа последовательности $a_1, \dots, a_n$ – положительные, то запись для q называется *обыкновенной цепной дробью*.

Предложение. Для любого рационального числа существует и единственная обыкновенная цепная дробь с нечетным числом элементов.

Рассмотрим для $q_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, k$, обыкновенные цепные дроби с нечетным числом элементов: $q_i =]a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,2n_i}[$. Обозначим через $]q_1, q_2, \dots, q_k[$ элемент

$$]a_{1,0}, a_{1,1}, \dots, a_{1,2n_1}, a_{2,0}, a_{2,1}, \dots, a_{2,2n_2}, \dots, a_{k,0}, a_{k,1}, \dots, a_{k,2n_k}[\in \overline{\mathbb{Q}}.$$

Целочисленные тангенсы. Целочисленной длиной отрезка AB (обозначение $l\ell(AB)$) называется отношение его евклидовой длины к минимальной евклидовой длине целочисленного вектора с концами в отрезке AB . Целочисленной (неориентированной) площадью многоугольника P (обозначение $lS(P)$) называется удвоенная евклидова площадь многоугольника.

Рассмотрим произвольный целочисленный угол $\angle ABC$. Граница выпуклой оболочки множества всех целых точек, за исключением B , входящих в выпуклую оболочку угла $\angle ABC$, называется *парусом* ортанта. Парус угла представляет собой конечную ломаную линию, с началом и концом на разных сторонах угла. Ориентируем ломаную от луча BA к лучу BC и обозначим ее вершины: $A_0, \dots, A_{m+1}$. Обозначим $a_i = l\ell(A_i A_{i+1})$ при $i = 0, \dots, m$, а также $b_i = lS(A_{i-1} A_i A_{i+1})$ при $i = 1, \dots, m$. Целочисленным тангенсом угла $\angle ABC$ называется следующее рациональное число:

$$]a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_m, a_m[\quad (\text{обозначение: } l\lg \angle ABC).$$

Формулировка теоремы. В евклидовой геометрии на плоскости условие на существование треугольника с заданными углами переписывается через тангенсы углов следующим образом. Треугольник с углами α , β и γ существует тогда и только тогда, когда $\lg(\alpha + \beta + \gamma) = 0$ и $\lg(\alpha + \beta) \notin [0; \lg \alpha]$ (здесь, не нарушая общности, мы предполагаем, что α — острый). Приведем целочисленный аналог последнего утверждения.

ТЕОРЕМА. а) Пусть α_0 , α_1 и α_2 — упорядоченная тройка целочисленных углов. Ориентированный целочисленный треугольник с последовательными углами, целочисленно-эквивалентными углам α_0 , α_1 и α_2 , существует тогда и только тогда, когда существует $j \in \{1, 2, 3\}$ такое, что углы $\alpha = \alpha_j$, $\beta = \alpha_{j+1 \pmod{3}}$ и $\gamma = \alpha_{j+2 \pmod{3}}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\text{i)}]l\lg \alpha, -1, l\lg \beta, -1, l\lg \gamma[= 0; \quad \text{ii)}]l\lg \alpha, -1, l\lg \beta[\notin [0; l\lg \alpha];$$

б) два целочисленных треугольника, последовательности целочисленных тангенсов которых совпадают, являются целочисленно-подобными.

Отметим, что в условии теоремы для тангенсов углов всегда берутся обыкновенные цепные дроби с нечетным числом элементов. Проиллюстрируем теорему на следующем частном примере:

$$l\lg \alpha = 3 =]3[;$$

$$l\lg \beta = 9/7 =]1, 3, 2[;$$

$$l\lg \gamma = 3/2 =]1, 1, 1[;$$

$$\text{i)}]3, -1, 1, 3, 2, -1, 1, 1[= 0;$$

$$\text{ii)}]3, -1, 1, 3, 2[= -3/2 \notin [0; 3].$$

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, *Функци. анализ и его прил.*, 14:2 (1980), 1–3. [2] I. Bárány, A. M. Vershik, *Geom. Funct. Anal.*, 2:4 (1992), 381–393.

О. Н. Карпенков (O. N. Karpenkov)
Независимый московский университет
E-mail: karpenk@mccme.ru

Представлено А. Б. Сосинским
Принято редколлегией
14.08.2006