Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Довбыш, Оптимальные ляпуновские метрики гомеоморфизмов, обладающих гиперболической структурой, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm540>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 04:26:51

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЛЯПУНОВСКИЕ МЕТРИКИ ГОМЕОМОРФИЗМОВ, ОБЛАДАЮЩИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

С. А. ДОВБЫШ

1. Напомним некоторые сведения [1], [2]. Пусть $f: X \rightarrow X$ – гомеоморфизм компактного метрического пространства X с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$, локальные (радиуса δ) устойчивое $W_\delta^s(x)$ и неустойчивое $W_\delta^u(x)$ “многообразия” точки $x \in X$ определяются как

$$W_\delta^s(x) = \{y : \rho(f^n x, f^n y) \leq \delta, n \geq 0\}, \quad W_\delta^u(x) = \{y : \rho(f^n x, f^n y) \leq \delta, n \leq 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Гомеоморфизм f обладает *гиперболической структурой* (ГС), а метрика ρ называется *гиперболической*, если существуют такие $\delta > 0$, $c \geq 1$ и $0 < \lambda < 1$, что

$$y \in W_\delta^s(x) \ (y \in W_\delta^u(x)) \implies \rho(f^n x, f^n y) \leq c\lambda^{|n|}\rho(x, y) \quad (1)$$

при $n \geq 0$ ($n \leq 0$). Метрика называется ляпуновской, если при этом $c = 1$.

Пусть Λ_s и Λ_u – точные нижние грани для констант λ таких, что при подходящих $c \geq 1$ выполнены неравенства (1), относящиеся, соответственно, к устойчивым и неустойчивым многообразиям. Константы Λ_s и Λ_u не изменятся при выборе меньшего радиуса δ локальных многообразий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Гомеоморфизм f (вернее, пространство X относительно гомеоморфизма f) обладает *локальной структурой произведения* (ЛСП), если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$, что при $\rho(x, y) \leq \varepsilon$ пересечение $W_\gamma^s(x) \cap W_\gamma^u(y)$ состоит из единственной точки, обозначаемой $[x, y]$, и отображение $[\cdot, \cdot]: \{(x, y) \in X \times X : \rho(x, y) \leq \varepsilon\} \rightarrow X$ непрерывно.

Аксиома $A^\#$ [1]–[3]. Гомеоморфизм f на метрическом компакте (X, ρ) удовлетворяет аксиоме $A^\#$, или является $A^\#$ -гомеоморфизмом, если он одновременно обладает и ГС и ЛСП, а метрика ρ является ляпуновской.

Аксиома $A^\#$ фактически появилась в [4] и была в явном виде сформулирована В. М. Алексеевым и М. В. Якобсоном.

Было доказано [5], что у гомеоморфизма f , обладающего ГС, имеется ляпуновская метрика, эквивалентная исходной (т.е. определяющая ту же топологию), причем эту метрику можно выбрать так [6], что оба отображения f и f^{-1} будут липшицевыми относительно нее. Кроме того, непрерывность отображения $[\cdot, \cdot]$ легко следует из его однозначности, см. [7]. Эти результаты фактически дают ответы на вопросы, поставленные в [1; с. 170], относительно возможности ослабления условий аксиомы $A^\#$. (См. также обзор [8] эквивалентных определений гомеоморфизмов, обладающих ГС и ЛСП.) Далее, доказано [6], что у гомеоморфизма, обладающего ГС и ЛСП, имеется ляпуновская метрика (эквивалентная исходной), относительно которой этот гомеоморфизм является $\mathcal{L}$ -гиперболическим в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [6]. Гомеоморфизм f метрического компакта (X, ρ_0) , обладающий ЛСП, называется $\mathcal{L}$ -гиперболическим, если

$$\rho_0(x, [x, y]) \leq A\rho_0(x, y), \quad \rho_0(y, [x, y]) \leq A\rho_0(x, y) \quad (2)$$

для некоторого $A > 0$ при $\rho_0(x, y) \leq \varepsilon$ и оба отображения f и f^{-1} являются липшицевыми.

Целью статьи является анонс результатов о существовании ляпуновских метрик (эквивалентных исходной метрике), обладающих некоторыми оптимальными свойствами.

2. ТЕОРЕМА 1. Пусть гомеоморфизм f обладает ГС и $\lambda_s \in [\Lambda_s, 1)$, $\lambda_u \in [\Lambda_u, 1)$. Тогда ляпуновскую метрику ρ_0 можно выбрать так, что $\rho_0(fx, fy)/\rho_0(x, y) \rightarrow \lambda_s$ (и, соответственно, $\rho_0(f^{-1}x, f^{-1}y)/\rho_0(x, y) \rightarrow \lambda_u$) равномерно по всем x, y таким, что $y \in W_\delta^s(x)$ (соответственно, $y \in W_\delta^u(x)$) при $\rho_0(x, y) \rightarrow 0$ или, что равносильно, при $\rho(x, y) \rightarrow 0$.

Как отмечено в [1], обычный прием, используемый для отыскания эквивалентной ляпуновской римановой метрики в случае гиперболического множества, здесь непосредственно не применим. Согласно мнению, высказанному в [1], причина этого состоит в том, что “многообразия” $W_\delta^s(x)$ и $W_\delta^u(x)$ могут не быть “гладкими” или “спрямляемыми” ни в каком, пусть даже очень слабом смысле. Однако последнее утверждение является, вообще говоря, неверным в силу следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть гомеоморфизм обладает ГС и ЛСП. Тогда ляпуновская метрика ρ_0 , существование которой утверждается в теореме 1, может быть выбрана так, что

а) для всякого $\nu > 0$ найдется $r > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} |\rho_0(x, [x, y]) + \rho_0([x, y], y) - \rho_0(x, y)| &\leq \nu \rho_0(x, y), \\ |\rho_0(x, [x, y]) + \rho_0(x, [y, x]) - \rho_0(x, y)| &\leq \nu \rho_0(x, y), \end{aligned}$$

если $\rho_0(x, y) < r$,

б) “многообразия” $W_\delta^s(x)$ и $W_\delta^u(x)$ оказываются спрямляемыми в следующем локальном смысле: для всякого $\nu > 0$ найдутся $r > 0$ и $\tau > 0$ такие, что из $y \in W_\delta^\sigma(x)$, где $\sigma = u, s$, и $\rho_0(x, y) < r$, $\rho_0(x, z) + \rho_0(z, y) < (1 + \tau)\rho_0(x, y)$ вытекает $\rho_0(z, W_\delta^\sigma(x)) < \nu \rho_0(x, y)$.

Теорема 2 означает, что а) в малых масштабах метрика ρ_0 приблизительно представляется как прямая сумма метрик, соответствующих каноническим координатам, и б) малые участки “многообразий” $W_\delta^\sigma(x)$, $\sigma = u, s$ (рассмотренные при надлежащем увеличении), приблизительно являются “плоскими” подмножествами в X .

СЛЕДСТВИЕ (теоремы 1 и п. а) теоремы 2). Гомеоморфизм f является $\mathcal{L}$ -гиперболическим относительно метрики ρ_0 , если были выбраны положительные $\lambda_s \in [\Lambda_s, 1)$ и $\lambda_u \in [\Lambda_u, 1)$. Более того, для всякого $\nu > 0$ найдется $r > 0$ такое, что если $\rho_0(x, y) < r$, то формулы (2) справедливы с $A = 1 + \nu$ и $\rho_0(fx, fy) \leq (\lambda_u^{-1} + \nu)\rho_0(x, y)$, $\rho_0(f^{-1}x, f^{-1}y) \leq (\lambda_s^{-1} + \nu)\rho_0(x, y)$. Это означает, что в малых масштабах константа A и постоянные Липшица для отображений f и f^{-1} могут быть выбраны близкими к единице, λ_u^{-1} и λ_s^{-1} соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. М. Алексеев. Символическая динамика: Одиннадцатая матем. школа. Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1976. [2] В. М. Алексеев, М. В. Якобсон // В кн.: Р. Боуэн. Методы символической динамики. М.: Мир, 1979. Добавление. С. 196–240. [3] М. В. Якобсон // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 5. С. 1021–1024. [4] R. Bowen // Amer. J. Math. 1970. V. 92. № 3. P. 725–747. [5] K. Sakai // Topology Appl. 1995. V. 63. № 3. P. 263–266. [6] K. Sakai // Topology Appl. 2001. V. 112. № 3. P. 229–243. [7] K. Hiraide // Tokyo J. Math. 1985. V. 8. № 1. P. 219–229. [8] J. Ombach // Topology Appl. 1986. V. 23. № 1. P. 87–90.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
23.05.2002