Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Захаров, Классификация борелевских множеств и функций в общем случае, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:41:09

КЛАССИФИКАЦИЯ БОРЕЛЕВСКИХ МНОЖЕСТВ И ФУНКЦИЙ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

В. К. ЗАХАРОВ

В заметке дается обобщение на произвольные пространства теорем Лебега–Хаусдорфа и Банаха о бэровской сходимостной классификации борелевских функций на метрических пространствах (см. [1; §31.IX]). Для этого вначале устанавливается дескриптивная классификация борелевских множеств в общем случае, обобщающая классификацию Юнга–Хаусдорфа в метрическом случае (см. [1; §30.III]).

1. Пусть T – фиксированное множество и $\mathcal{P}(T)$ – *полный ансамбль на T* , т.е. множество всех подмножеств из T . Любое непустое подмножество $\mathcal{S}$ множества $\mathcal{P}(T)$ называется *ансамблем на T* . Ансамбль $\mathcal{R} \equiv \text{co-}\mathcal{S} \equiv \{P \in \mathcal{P}(T) \mid \exists S \in \mathcal{S} (P = T \setminus S)\}$ называется *коансамблем ансамбля $\mathcal{S}$* . Ансамбль $\mathcal{S}_\sigma[\mathcal{S}_\delta]$, состоящий из всех $P \in \mathcal{P}(T)$ таких, что $P = \bigcup (S_i \mid i \in I)$ [$P = \bigcap (S_i \mid i \in I)$] для некоторой счетной коллекции $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, называется *σ -оболочкой* [*δ -оболочкой*] ансамбля $\mathcal{S}$. Если $\mathcal{S}$ является σ -аддитивным (т.е. $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\sigma$), δ -мультипликативным (т.е. $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\delta$), замкнутым относительно дополнений (т.е. $\mathcal{S} = \text{co-}\mathcal{S}$) и содержит края $\emptyset$ и T , то $\mathcal{S}$ называется *σ -алгеброй на T* . Наименьшая из всех σ -алгебр на T , содержащих ансамбль $\mathcal{S}$, называется *ансамблем борелевских множеств на T относительно ансамбля $\mathcal{S}$* и обозначается через $\mathcal{B}(T, \mathcal{S})$. Ансамбль $\mathcal{S}$ называется *совершенным*, если он аддитивен, содержит края $\emptyset$ и T и $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}_\sigma$. Ансамбль $\mathcal{S}$ называется *отделимым*, если для любых непересекающихся множеств $A, A' \in \mathcal{R}$ существуют непересекающиеся множества $B, B' \in \mathcal{S}$ такие, что $A \subset B$ и $A' \subset B'$.

Рассмотрим для $\mathcal{S}$ *аддитивный производный ансамбль* $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(T, \mathcal{S})$, состоящий из всех $P \in \mathcal{P}(T)$ таких, что $P = \bigcup (S_m \cup R_m \mid m \in M)$ для некоторых конечных коллекций $(S_m \in \{\emptyset\} \cup \mathcal{S} \mid m \in M)$ и $(R_m \in \{\emptyset\} \cup \mathcal{R} \mid m \in M)$, и *мультипликативный производный ансамбль* $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(T, \mathcal{S})$, состоящий из всех $P \in \mathcal{P}(T)$ таких, что $P = \bigcap (S_m \cap R_m \mid m \in M)$ для некоторых конечных коллекций $(S_m \in \{T\} \cup \mathcal{S} \mid m \in M)$ и $(R_m \in \{T\} \cup \mathcal{R} \mid m \in M)$. Ясно, что $\mathcal{K} = \text{co-}\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}$ является совершенным. Ансамбли $\mathcal{S}_\lambda \equiv \mathcal{K}(T, \mathcal{S})_\sigma$ и $\mathcal{S}_\gamma \equiv \mathcal{L}(T, \mathcal{S})_\delta$ назовем *λ -оболочкой* и *γ -оболочкой ансамбля $\mathcal{S}$* .

2. Для произвольного ансамбля $\mathcal{E}$ на T рассмотрим *$\sigma\delta$ -коллекцию* $(\Sigma_\alpha(T, \mathcal{E}) \subset \mathcal{P}(T) \mid \alpha \in \omega_1 + 1)$ такую, что $\Sigma_0(T, \mathcal{E}) \equiv \mathcal{E}$, $\Sigma_\alpha(T, \mathcal{E}) \equiv (\bigcup (\Sigma_\beta(T, \mathcal{E}) \mid \beta \in \alpha))_\sigma$ для каждого нечетного порядкового числа $\alpha < \omega_1$ и $\Sigma_\alpha(T, \mathcal{E}) \equiv (\bigcup (\Sigma_\beta(T, \mathcal{E}) \mid \beta \in \alpha))_\delta$ для каждого четного $0 < \alpha \leq \omega_1$. Аналогичным образом рассмотрим *$\delta\sigma$ -коллекцию* $(\Delta_\alpha(T, \mathcal{E}) \subset \mathcal{P}(T) \mid \alpha \in \omega_1 + 1)$ такую, что $\Delta_0(T, \mathcal{E}) \equiv \mathcal{E}$, $\Delta_\alpha(T, \mathcal{E}) \equiv (\bigcup (\Delta_\beta(T, \mathcal{E}) \mid \beta \in \alpha))_\delta$ для нечетного $\alpha < \omega_1$ и $\Delta_\alpha(T, \mathcal{E}) \equiv (\bigcup (\Delta_\beta(T, \mathcal{E}) \mid \beta \in \alpha))_\sigma$ для четного $0 < \alpha \leq \omega_1$. Они называются *коллекциями Юнга–Хаусдорфа*. Обозначим σ -аддитивные ансамбли $\Delta_\alpha(T, \mathcal{E})$ с четными индексами $\alpha \in [2, \omega_1[$ и $\Sigma_\alpha(T, \text{co-}\mathcal{E})$ с нечетными индексами $\alpha \in [1, \omega_1[$ через $Y_\alpha(T, \mathcal{E})$; для $\alpha = 0$ положим $Y_0(T, \mathcal{E}) \equiv \mathcal{E}$. Соответственно δ -мультипликативные ансамбли $\Delta_\alpha(T, \mathcal{E})$ с нечетными индексами $\alpha \in [1, \omega_1[$ и $\Sigma_\alpha(T, \text{co-}\mathcal{E})$ с четными индексами $\alpha \in [2, \omega_1[$ обозначим через $\Theta_\alpha(T, \mathcal{E})$; для $\alpha = 0$ положим $\Theta_0(T, \mathcal{E}) \equiv \text{co-}\mathcal{E}$.

Рассмотрим также две новые коллекции: *σ -коллекцию* $(\Lambda_\alpha(T, \mathcal{E}) \subset \mathcal{P}(T) \mid \alpha \in \omega_1 + 1)$ такую, что $\Lambda_0(T, \mathcal{E}) \equiv \mathcal{E}$ и $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{E}) \equiv (\bigcup (\Lambda_\beta(T, \mathcal{E}) \mid \beta \in \alpha))_\lambda$ для каждого $\alpha \in [1, \omega_1]$; и *δ -коллекцию* $(\Gamma_\alpha(T, \mathcal{E}) \subset \mathcal{P}(T) \mid \alpha \in \omega_1 + 1)$ такую, что $\Gamma_0(T, \mathcal{E}) \equiv \mathcal{E}$ и $\Gamma_\alpha(T, \mathcal{E}) \equiv (\bigcup (\Gamma_\beta(T, \mathcal{E}) \mid \beta \in \alpha))_\gamma$ для каждого $\alpha \in [1, \omega_1]$.

ТЕОРЕМА 1 (дескриптивная классификационная теорема). Пусть S – произвольный ансамбль на множестве T . Тогда:

- 1) $\mathcal{B}(T, \mathcal{S}) = \bigcup (\Sigma_\alpha(T, \mathcal{K}) \mid \alpha \in \omega_1) = \bigcup (\Delta_\alpha(T, \mathcal{L}) \mid \alpha \in \omega_1)$;
- 2) $\mathcal{B}(T, \mathcal{S}) = \bigcup (\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1) = \bigcup (\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1)$;
- 3) $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) = Y_\alpha(T, \mathcal{L})$ и $\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Theta_\alpha(T, \mathcal{L})$ для каждого $\alpha \in [1, \omega_1]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на множестве T . Тогда $\Sigma_\alpha(T, \mathcal{K}) = \Sigma_\alpha(T, \mathcal{R})$, $\Delta_\alpha(T, \mathcal{L}) = \Delta_\alpha(T, \mathcal{S})$, $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) = Y_\alpha(T, \mathcal{S})$ и $\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Theta_\alpha(T, \mathcal{S})$ для каждого $\alpha \in [1, \omega_1]$. В частности, $\mathcal{K}_\sigma = \mathcal{R}_\sigma$ и $\mathcal{L}_\delta = \mathcal{S}_\delta$.

ТЕОРЕМА 2. Ансамбли $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})$ для всех $\alpha \in [1, \omega_1[$ являются separable, совершенными, σ -аддитивными и мультипликативными.

3. Пусть $A(T)$ – некоторое семейство функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим семейство $p\text{-}\lim A(T)$, состоящее из всех функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $f = p\text{-}\lim(f_n \mid n \in \omega_0)$ для некоторой последовательности $(f_n \in A(T) \mid n \in \omega_0)$, где буква p от слова “point”. Рассмотрим *бэровскую сходимостную коллекцию* $(\text{Lim}_\alpha A(T) \mid \alpha \in \omega_1 + 1)$ функциональных семейств на T такую, что $\text{Lim}_0 A(T) \equiv A(T)$ и $\text{Lim}_\alpha A(T) \equiv p\text{-}\lim \bigcup (\text{Lim}_\beta A(T) \mid \beta \in \alpha)$ для каждого $\alpha \leq \omega_1$.

Для произвольного ансамбля $\mathcal{E}$ на T рассмотрим семейство $M(T, \mathcal{E})$ всех $\mathcal{E}$ -измеримых функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. таких, что $f^{-1}]x, y[\in \mathcal{E}$ для любого $]x, y[\subset \mathbb{R}$. Семейство $M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S}))$ называется *семейством борелевских функций на T относительно ансамбля $\mathcal{S}$* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T такой, что ансамбль $\mathcal{S}_\sigma$ является совершенным, separable и мультипликативным. Тогда $\text{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{S}_\sigma) = M(T, \Lambda_\alpha(T, \mathcal{B}_\delta))$ для каждого $\alpha \in [1, \omega_1[$ и $M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \bigcup (\text{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{S}_\sigma) \mid \alpha \in \omega_1)$.

ТЕОРЕМА 3 (первая сходимостная классификационная теорема). Пусть $\mathcal{S}$ – произвольный ансамбль на множестве T . Тогда $\text{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{K}_\sigma) = M(T, \Lambda_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}))$ для каждого $\alpha \in \omega_1$ и $M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \bigcup (\text{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{K}_\sigma) \mid \alpha \in \omega_1)$. При совершенном $\mathcal{S}$ равенство $\mathcal{K}_\sigma = \mathcal{R}_\sigma$ дает теорему Банаха.

При дополнительных условиях можно заменить семейство $M(T, \mathcal{K}_\sigma)$ на более узкое семейство $M(T, \mathcal{S})$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный, separable, σ -аддитивный и мультипликативный ансамбль на множестве T . Тогда $\text{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{S}) = M(T, \Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}))$ для каждого $\alpha \in \omega_0$, $\text{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{S}) = M(T, \Lambda_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}))$ для каждого $\alpha \in [\omega_0, \omega_1[$ и $M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \bigcup (\text{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1)$ (теорема Лебега–Хаусдорфа).

В качестве исходного вместо семейства измеримых функций можно взять следующее более узкое семейство. Функцию $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *равномерной на множестве T относительно ансамбля $\mathcal{E}$* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие $(E_i \in \mathcal{E} \mid i \in I)$ множества T такое, что $\omega(f, E_i) \equiv \sup\{|f(s) - f(t)| \mid \{s, t\} \subset E_i\} < \varepsilon$ для каждого $i \in I$ (см. [2; 1.2.2]). Семейство всех таких функций на T обозначим через $U(T, \mathcal{E})$. Для него справедливы вложения $M_b(T, \mathcal{E}) \subset U(T, \mathcal{E}) \subset M_b(T, \mathcal{E}_\sigma)$.

ТЕОРЕМА 5 (вторая сходимостная классификационная теорема). Пусть $\mathcal{S}$ – произвольный ансамбль на множестве T . Тогда $M(T, \Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})) \subset \text{Lim}_\alpha U(T, \mathcal{K}) \subset M(T, \Lambda_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}))$ для каждого $\alpha \in [1, \omega_0[$, $\text{Lim}_\alpha U(T, \mathcal{K}) = M(T, \Lambda_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}))$ для каждого $\alpha \in [\omega_0, \omega_1[$ и $M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \bigcup (\text{Lim}_\alpha U(T, \mathcal{K}) \mid \alpha \in \omega_1)$.

При дополнительных условиях можно заменить семейство $U(T, \mathcal{K})$ на более узкое семейство $U(T, \mathcal{S})$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный, separable и мультипликативный ансамбль на множестве T . Тогда $M(T, \Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})) \subset \text{Lim}_{\alpha+1} U(T, \mathcal{S}) \subset M(T, \Lambda_{\alpha+2}(T, \mathcal{S}))$ для каждого $\alpha \in [1, \omega_0[$, $\text{Lim}_\alpha U(T, \mathcal{S}) = M(T, \Lambda_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}))$ для каждого $\alpha \in [\omega_0, \omega_1[$ и $M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \bigcup (\text{Lim}_\alpha U(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. Куратовский. Топология. М.: Мир, 1966. [2] В. К. Захаров // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. № 6. С. 121–138.