Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, Совершенно уравновешенные гипергеометрические ряды и кратные интегралы, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm542>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:01:44

СОВЕРШЕННО УРАВНОВЕШЕННЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ И КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В. В. Зудилин

Цель данной заметки – установить связь между двумя объектами: совершенно уравновешенными гипергеометрическими рядами

$$\begin{aligned} F_k(\mathbf{h}) &= F_k(h_0; h_1, \dots, h_k) := \sum_{\mu=0}^{\infty} (h_0 + 2\mu) \frac{\prod_{j=0}^k \Gamma(h_j + \mu)}{\prod_{j=0}^k \Gamma(1 + h_0 - h_j + \mu)} (-1)^{(k+1)\mu} \\ &= \frac{\Gamma(1 + h_0) \prod_{j=1}^k \Gamma(h_j)}{\prod_{j=1}^k \Gamma(1 + h_0 - h_j)} {}_{k+2}F_{k+1} \left(\begin{matrix} h_0, 1 + \frac{1}{2}h_0, & h_1, & \dots, & h_k \\ \frac{1}{2}h_0, & 1 + h_0 - h_1, \dots, 1 + h_0 - h_k \end{matrix} \middle| (-1)^{k+1} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

и кратными интегралами

$$\begin{aligned} J_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= J_k \left(\begin{matrix} a_0, a_1, \dots, a_k \\ b_1, \dots, b_k \end{matrix} \right) \\ &:= \int \dots \int_{[0,1]^k} \frac{\prod_{j=1}^k x_j^{a_j-1} (1-x_j)^{b_j-a_j-1}}{(1 - (1 - (\dots (1 - (1 - x_k)x_{k-1}) \dots)x_2)x_1)^{a_0}} dx_1 dx_2 \dots dx_k. \end{aligned} \quad (2)$$

ТЕОРЕМА. Пусть $k \geq 1$ и параметры $h_0, h_1, \dots, h_{k+2} \in \mathbb{C}$ удовлетворяют условиям

$$1 + \operatorname{Re} h_0 > \frac{2}{k+1} \cdot \sum_{j=1}^{k+2} \operatorname{Re} h_j, \quad \operatorname{Re}(1 + h_0 - h_{j+1}) > \operatorname{Re} h_j > 0 \quad \text{для } j = 2, \dots, k+1$$

и $h_1, h_{k+2} \neq 0, -1, -2, \dots$. Тогда имеет место тождество

$$\begin{aligned} &\frac{\prod_{j=1}^{k+1} \Gamma(1 + h_0 - h_j - h_{j+1})}{\Gamma(h_1) \Gamma(h_{k+2})} \cdot F_{k+2}(h_0; h_1, \dots, h_{k+2}) \\ &= J_k \left(\begin{matrix} h_1, & h_2, & h_3, & \dots, & h_{k+1} \\ 1 + h_0 - h_3, 1 + h_0 - h_4, \dots, 1 + h_0 - h_{k+2} \end{matrix} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство проводится методом математической индукции. Для $k = 1$ утверждение теоремы следует из предельного случая теоремы Дугалла [1, § 4.4, формула (1)]. Для $k \geq 2$, полагая $\varepsilon_k = 0$ при k четном и $\varepsilon_k = 1$ или -1 при k нечетном, мы пользуемся соотношением

$$\begin{aligned} J_k \left(\begin{matrix} a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k \\ b_1, \dots, b_{k-1}, b_k \end{matrix} \right) &= \frac{\Gamma(b_k - a_k)}{\Gamma(a_0)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-t_0 - i\infty}^{-t_0 + i\infty} \frac{\Gamma(a_0 + t) \Gamma(a_k + t) \Gamma(-t)}{\Gamma(b_k + t)} e^{\varepsilon_k \pi i t} \\ &\quad \times J_{k-1} \left(\begin{matrix} a_0 + t, a_1 + t, \dots, a_{k-1} + t \\ b_1 + t, \dots, b_{k-1} + t \end{matrix} \right) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

где $t_0 \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} a_0 > t_0 > 0$, $\operatorname{Re} a_k > t_0 > 0$, $\operatorname{Re} b_k > \operatorname{Re} a_0 + \operatorname{Re} a_k$ и интеграл в левой части (4) сходится. Представляя гипергеометрический ряд (1) в виде контурного интеграла Барнса и применяя к подынтегральному выражению в правой части (4) индукционное предположение, мы получаем требуемое тождество (3).

Отметим, что ряд в правой части (3) допускает ‘менее экономичное’ представление в виде эйлерова кратного интеграла по кубу $[0, 1]^{k+2}$ (см. [2, лемма 1]). Из приведенной теоремы и недавних результатов С. А. Злобина [3], [4] вытекает также представление совершенно уравновешенного гипергеометрического ряда (1) в виде кратного интеграла, предложенного в работах В. Н. Сорокина [5], [6].

Несмотря на аналитический характер теоремы, тождество (3) мотивировано арифметическими результатами для значений дзета-функции Римана (*дзета-значений*) в целых положительных точках [5]–[13]. Известно [13], что в случае целочисленных параметров $\mathbf{h}$ совершенно уравновешенный гипергеометрический ряд (1) является $\mathbb{Q}$ -линейной формой от четных или нечетных дзета-значений в зависимости от четности $k \geq 4$. Поэтому если целые положительные параметры $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ удовлетворяют дополнительному условию

$$b_1 + a_2 = b_2 + a_3 = \dots = b_{k-1} + a_k, \quad (5)$$

то интеграл (2) является $\mathbb{Q}$ -линейной формой от дзета-значений одинаковой четности. Специализация $a_j = n + 1$, $b_j = 2n + 2$ приводит к совпадению кратных интегралов и совершенно уравновешенных гипергеометрических рядов, высказанному нами в качестве гипотезы в [13, §9]; обозначая соответствующие интегралы (2) через $J_{k,n}$ и применяя арифметические результаты из [12, леммы 4.2–4.4], мы заключаем, что

$$D_n^{k+1} \Phi_n^{-1} \cdot J_{k,n} \in \mathbb{Z}\zeta(k) + \mathbb{Z}\zeta(k-2) + \dots + \mathbb{Z}\zeta(3) + \mathbb{Z} \quad \text{для нечетного } k, \quad (6)$$

где D_n – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, n$, а Φ_n – произведение простых чисел $p < n$, для которых $2/3 \leq \{n/p\} < 1$ ($\{\cdot\}$ – дробная часть числа). Включения (6) (с множителем D_n^k вместо $D_n^{k+1} \Phi_n^{-1}$) были предположены Д. Васильевым [14] (см. также [11, комментарий к теореме 2]) и доказаны им для $k = 5$ (случай $k = 3$ разобран в [7]). Таким образом, мы даем частичный ответ к гипотезе Васильева. Выбор $a_j = rn + 1$, $b_j = (r+1)n + 2$ в (2) (или, эквивалентно, $h_0 = (2r+1)n + 2$ и $h_j = rn + 1$ для $j = 1, \dots, k+2$ в (1)) с целым $r \geq 1$, зависящим от заданного нечетного k , приводит к почти тем же линейным формам от нечетных дзета-значений, рассмотренным Т. Ривоалем [10] в доказательстве его замечательного результата о бесконечности множества иррациональных чисел среди $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$.

Кроме того, следует отметить очевидную инвариантность в предположении (5) величины

$$\frac{F_{k+2}(h_0; h_1, \dots, h_{k+2})}{\prod_{j=1}^{k+2} \Gamma(h_j)} = \frac{J_k(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\prod_{j=1}^k \Gamma(a_j) \cdot \Gamma(b_1 + a_2 - a_0 - a_1) \cdot \prod_{j=1}^k \Gamma(b_j - a_j)}$$

под действием ($\mathbf{h}$ -тривиальной) группы $\mathfrak{S}$ порядка $(k+2)!$, состоящей из всех перестановок параметров $h_1, \dots, h_{k+2}$. Этот результат также имеет теоретико-числовые приложения. В случаях $k = 2$ и $k = 3$ замена переменных $(x_{k-1}, x_k) \mapsto (1 - x_k, 1 - x_{k-1})$ в (2) реализует дополнительное преобразование с как интеграла (2), так и ряда (1); для $k \geq 4$ это преобразование недоступно, поскольку нарушается условие (5). Группы $\langle \mathfrak{S}, \mathbf{c} \rangle$ порядков 120 и 1920 для $k = 2$ и $k = 3$ соответственно известны [8], [9]; Дж. Рин и К. Виола применяют их, чтобы получить хорошие оценки мер иррациональности чисел $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$. В случае $k \geq 4$ группа $\mathfrak{S}$ допускает естественную интерпретацию как группа перестановок параметров $e_{0l} = h_l - 1$, $1 \leq l \leq k+2$, и $e_{jl} = h_0 - h_j - h_l$, $1 \leq j < l \leq k+2$ (детали см. в [13, §9]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. N. Bailey. Generalized hypergeometric series. New York: Stechert-Hafner, 1964. (Cambridge Math. Tracts. V. 32.) [2] Т. Rivoal, W. Zudilin // Prépubl. de l'Institut de Math. de Jussieu № 315 (janvier 2002). Paris, 2002. [3] С. А. Злобин // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 5. С. 782–787. [4] С. А. Злобин // УМН. 2002. Т. 57. № 3. С. 153–154. [5] В. Н. Сорокин // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 87–120. [6] В. Н. Сорокин // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1998. № 3. С. 48–52. [7] F. Beukers // Bull. London Math. Soc. 1979. V. 11. № 3. P. 268–272. [8] G. Rhin, C. Viola // Acta Arith. 1996. V. 77. № 1. P. 23–56. [9] G. Rhin, C. Viola // Acta Arith. 2001. V. 97. № 3. P. 269–293. [10] Т. Rivoal // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2000. V. 331. № 4. P. 267–270. [11] Д. В. Васильев // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 5. С. 36–40. [12] В. В. Зудилин // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 3. С. 49–102. [13] W. Zudilin // E-print math.NT/0206176 (August 2001). [14] D. V. Vasilyev // Preprint no. 1(558). Minsk: Nat. Acad. Sci. Belarus, Institute Math., 2001.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: wadim@ips.ras.ru

Принято редколлегией
03.06.2002