Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Кравцов, Об одном семействе разрешимых модальных логик, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm543>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:13:35

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ РАЗРЕШИМЫХ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК

А. Г. КРАВЦОВ

В данной работе рассматриваются расширения модальной логики SL^n , представляющей собой многомерный аналог известной логики “завтра” К. Сегерберга SL . Логика SL^n впервые была изучена в [1]. Мы доказываем разрешимость всех конечно аксиоматизируемых расширений SL^n .

Напомним, что SL^n получается из n -модального варианта SL добавлением аксиом вида $\Box_i \Box_j p \equiv \Box_j \Box_i p$ при $1 \leq i < j \leq n$.

SL^n -шкала – это шкала Крипке вида $(W, R_1, \dots, R_n)$, где $R_1, \dots, R_n$ – попарно коммутирующие функции. SL^n -конус – это SL^n -шкала с корнем. $L(C)$ обозначает модальную логику конуса C .

В [2] автором было показано следующее.

ЛЕММА 1.

- (1) Каждый SL^n -конус однозначно соответствует конгруэнции на $\mathbb{N}^n$.
- (2) Формула общезначима на SL^n -конусе тогда и только тогда, когда она общезначима в его вершине.
- (3) Если $\Lambda_i = SL^n + A_i$, причем A_i не содержат одинаковых переменных при разных i , то $\bigcap_i \Lambda_i = SL^n + \bigvee_i A_i$.
- (4) Любое конечно аксиоматизируемое расширение SL^n является логикой конечного числа SL^n -конусов.

Для множества полиномов S над $\mathbb{Q}$ обозначим через $\langle S \rangle$ ($= \mathbb{Q}[S]$) наименьшее кольцо, содержащее S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\sim$ – конгруэнция на $\mathbb{N}^n$. Положим

$$P_{\sim} = \langle \{x^a - x^b \mid a \sim b\} \rangle.$$

Между конгруэнциями на $\mathbb{N}^n$ и SL^n -конусами существует следующая связь.

ЛЕММА 3. Пусть $\sim$ – конгруэнция на $\mathbb{N}^n$. Тогда

- (1) приведенный базис Грёбнера (см. [3]) для $P_{\sim}$ состоит из полиномов вида $x^a - x^b$;
- (2) если $x^a - x^b$ – элемент приведенного базиса Грёбнера для $P_{\sim}$, то $a \sim b$;
- (3) $x^a - x^b \in P_{\sim} \Leftrightarrow a \sim b$.

Для $a = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{N}^n$ $\Box^a$ обозначает модальный оператор $\Box_1^{a^1} \dots \Box_n^{a^n}$.

ЛЕММА 4. Пусть $\sim$ – конгруэнция на $\mathbb{N}^n$, C – соответствующий ей SL^n -конус, $a_i, b_i \in \mathbb{N}^n$, $1 \leq i \leq k$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $L(C) = SL^n + \bigwedge_{i=1}^k \Box^{a_i} p \equiv \Box^{b_i} p$,
- (2) $P_{\sim} = \langle \{x^{a_i} - x^{b_i} \mid 1 \leq i \leq k\} \rangle$,
- (3) $\sim$ – это наименьшая конгруэнция, содержащая все пары (a_i, b_i) .

Отсюда можно получить аксиоматизацию логики SL^n -конуса.

ЛЕММА 5. Если C – SL^n -конус, то найдутся a_i, b_i , $1 \leq i \leq k$, такие, что

$$L(C) = SL^n + \bigwedge_{i=1}^k \Box^{a_i} p \equiv \Box^{b_i} p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно выбрать такие a_i, b_i , что $x^{a_i} - x^{b_i}$ образуют базис Грёбнера $P_{\sim}$, где $\sim$ – конгруэнция, соответствующая C . Утверждение леммы следует из леммы 4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Формула вида

$$A = \bigvee_{j=1}^m \bigwedge_{i=1}^{k_j} \Box^{a_{ij}} p_j \equiv \Box^{b_{ij}} p_j,$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{N}^n$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq k_j$, называется *нормальной*.

Произвольные расширения SL^n аксиоматизируются формулами в нормальном виде.

ЛЕММА 7. Если $SL^n + A$ непротиворечива, то для некоторой формулы B в нормальном виде $SL^n + A = SL^n + B$, причем B можно построить по A алгоритмически.

ЛЕММА 8. По формуле A можно алгоритмически распознать непротиворечивость $SL^n + A$.

Следующее утверждение показывает разрешимость логик SL^n -конусов.

ЛЕММА 9. По $a_i, b_i \in \mathbb{N}^n$, $1 \leq i \leq k$, и формуле A можно алгоритмически распознать, выполняется ли $A \in L$, где

$$L = SL^n + \bigwedge_{i=1}^k \Box^{a_i} p \equiv \Box^{b_i} p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем A к виду $A \equiv B$, где

$$B = \phi(p_1, \dots, p_t, \dots, \Box^a p_1, \dots, \Box^a p_t, \dots, \Box^d p_1, \dots, \Box^d p_t),$$

$d \in \mathbb{N}^n$, $0 \leq a^i \leq d^i$, ϕ не содержит модальностей.

Построим для $\{x^{a_i} - x^{b_i} \mid 1 \leq i \leq k\}$ приведенный базис Грёбнера. При помощи этого базиса Грёбнера определим, какие из $\Box^a p_j$ равносильны в L ; построим B' заменой в формуле B подформулы вида $\Box^a p_j$ на новые переменные, заменяя эквивалентные подформулы на одинаковые переменные.

Тогда $A \in L$ тогда и только тогда, когда B' – классическая тавтология.

ТЕОРЕМА 10. Любое конечно аксиоматизируемое расширение SL^n разрешимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следующий алгоритм позволяет выяснить, выполняется ли $B \in SL^n + A$.

- (1) Если $SL^n + A$ противоречива (проверяется по лемме 8), то закончить работу с результатом “да”.
- (2) Построим для $SL^n + A$ аксиому в нормальном виде согласно лемме 7:

$$SL^n + A = SL^n + \bigvee_{j=1}^m \bigwedge_{i=1}^{k_j} \Box^{a_{ij}} p_j \equiv \Box^{b_{ij}} p_j.$$

- (3) Для каждой логики $L_j \Leftarrow SL^n + \bigwedge_{i=1}^{k_j} \Box^{a_{ij}} p_j \equiv \Box^{b_{ij}} p_j$ проверим по лемме 9, содержится ли в ней B .
- (4) Если B содержится в $L_1, \dots, L_m$, то результат – “да”, иначе – “нет”.

В заключение отметим, что в действительности все расширения SL^n разрешимы, так как они конечно аксиоматизируемы (доказательство этого факта будет опубликовано позднее).

Автор выражает благодарность В. Б. Шехтману за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Gabbay, V. Shehtman // Logic J. IGPL. 1998. V. 6. № 1. P. 73–146. [2] A. G. Kravtsov // Bull. Symbolic Logic. 2002. V. 8. № 1. P. 124. [3] В. В. Прасолов. Многочлены. М.: Изд-во МЦНМО, 1999.

Принято редколлегией
23.05.2002