Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Миллионщиков, Когомологии с локальными коэффициентами солвмногообразий и задачи теории Морса–Новикова, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm545>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 04:00:31

КОГОМОЛОГИИ С ЛОКАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ СОЛВМНОГООБРАЗИЙ И ЗАДАЧИ ТЕОРИИ МОРСА–НОВИКОВА

Д. В. Миллионщиков

Рассмотрим комплекс де Рама $\Lambda^*(M)$ гладкого компактного многообразия M с деформированным дифференциалом $d_{\lambda\omega} = d + \lambda\omega \wedge$, где λ – комплексный параметр, а ω – некоторая замкнутая 1-форма. Когомологии комплекса $(\Lambda^*(M), d_{\lambda\omega})$ возникают естественным образом в рамках теории Морса–Новикова [1] и совпадают с когомологиями $H_{\rho_{\lambda\omega}}^*(M, \mathbb{C})$ многообразия M с коэффициентами в локальной системе $\rho_{\lambda\omega}$ групп $\mathbb{C}^*$, где $\rho_{\lambda\omega}(\gamma) = \exp \int_{\gamma} \lambda\omega$ (см. [2]).

Л. А. Алания в [3] доказал, что $H_{\rho_{\lambda\omega}}^*(M_n, \mathbb{C}) = 0$ при $\lambda\omega \neq 0$ для одного семейства нильмногообразий M_n , там же было отмечено, что подобная теорема верна для произвольных нильмногообразий. Технически более сложная задача о вычислении $H_{\rho_{\lambda\omega}}^*(M_n, \mathbb{C})$ при $\lambda\omega = 0$ частично была решена в [4]. Продолжим исследование, начатое в [3], в более общей ситуации, рассматривая теперь солвмногообразия – компактные однородные пространства G/Γ односвязных разрешимых групп Ли G относительно решеток Γ . Согласно теореме Хаттори [5] когомологии $H_{\rho_{\lambda\omega}}^*(G/\Gamma, \mathbb{C})$ произвольного солвмногообразия G/Γ с вполне разрешимой группой Ли G изоморфны когомологиям $H_{\rho_{\lambda\omega}}^*(\mathfrak{g})$ комплекса $(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*), d_{\lambda\omega})$ соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно деформированного дифференциала $d_{\lambda\omega} = d + \lambda\omega \wedge$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Комплекс $(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*), d_{\lambda\omega})$ совпадает с коцепным комплексом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в одномерном представлении ($\mathfrak{g}$ -модуле) $\rho_{\lambda\omega} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$, где $\rho_{\lambda\omega}(\xi) = \lambda\omega(\xi)$, $\xi \in \mathfrak{g}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Представления $\rho_{\lambda\omega}$ решетки Γ и алгебры Ли $\mathfrak{g}$ продолжаются до одномерного представления $\rho_{\lambda\omega}$ самой группы G : $\rho_{\lambda\omega}(g) = \exp \int_{\gamma(e, g)} \lambda\omega$, где $\gamma(e, g) \subset G$ – некоторый путь в G , соединяющий $g \in G$ с единицей e группы (ω – левоинвариантная 1-форма). В этой ситуации применима теорема Мостова [6; теорема 7.26], еще более расширяющая класс солвмногообразий, для которых вложение левоинвариантных форм индуцирует изоморфизм когомологий $H_{\rho_{\lambda\omega}}^*(\mathfrak{g}) \rightarrow H_{\rho_{\lambda\omega}}^*(G/\Gamma, \mathbb{C})$.

Будем говорить, что $\mathfrak{g}$ -модуль M содержится в $\mathfrak{g}$ -модуле V , если M является фактормодулем некоторого подмодуля в V или же подмодулем некоторого фактормодуля V .

ТЕОРЕМА 1 (Диксмье, [7]). *Пусть $\mathfrak{g}$ – n -мерная нильпотентная алгебра Ли, V – некоторый конечномерный $\mathfrak{g}$ -модуль. Тогда*

- 1) *если в V не содержится тривиальных $\mathfrak{g}$ -модулей, то $H^*(\mathfrak{g}, V) = 0$;*
- 2) *если в V содержится тривиальный $\mathfrak{g}$ -модуль, то $\dim H^p(\mathfrak{g}, V) \geq 2$, $1 \leq p \leq n-1$, и $\dim H^0(\mathfrak{g}, V) \geq 1$, $\dim H^n(\mathfrak{g}, V) \geq 1$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть G/Γ – нильмногообразие, а $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли группы Ли G . Тогда $H_{\rho_{\lambda\omega}}^*(G/\Gamma, \mathbb{C}) \cong H_{\rho_{\lambda\omega}}^*(\mathfrak{g}) = 0$ для $\lambda\omega \neq 0$.*

Таким образом, теорема 1 из [3] является следствием теоремы Диксмье.

ЛЕММА. *Пусть $\mathfrak{g}$ – n -мерная комплексная разрешимая (или вещественная вполне разрешимая) алгебра Ли с $\dim H^1(\mathfrak{g}) = k$. Тогда существует базис $\omega_1, \dots, \omega_n$ в $\mathfrak{g}^*$ такой, что*

$$d\omega_i = 0, \quad i = 1, \dots, k; \quad d\omega_j = \alpha_j \wedge \omega_j + P_j(\omega_1, \dots, \omega_{j-1}), \quad j = k+1, \dots, n,$$

где набор $\{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$ замкнутых 1-форм имеет следующий инвариантный смысл: это набор весов (вместе с их кратностями) вполне приводимого представления, ассоциированного с $\text{ad}|_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$ – ограничением присоединенного представления на коммутант.

Для доказательства достаточно применить теорему Ли к представлению $\text{ad}|_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$.

При помощи базиса $\omega_1, \dots, \omega_n$ определяются фильтрация F комплекса $(\Lambda^*(\mathfrak{g}), d_{\lambda\omega})$ и соответствующая спектральная последовательность E_r , сходящаяся к $H_{\lambda\omega}^*(\mathfrak{g})$. E_r вырождается в первом члене E_1 , если $-\lambda\omega$ принадлежит дополнению конечного множества $\{0\} \cup \Omega_{\mathfrak{g}}$ в $H^1(\mathfrak{g})$. $\Omega_{\mathfrak{g}}$ определяется как множество всевозможных p -сумм вида $\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_p}$, где $k+1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ и $p = 1, \dots, n$, форм из набора $\{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$. Заметим, что множество $\Omega_{\mathfrak{g}}$ отвечает за невырождение спектральной последовательности в первом члене, но и ненулевой E_1 , вообще говоря, не гарантирует нетривиальность E_{∞} . Поэтому и нужно ввести $\tilde{\Omega}_{\mathfrak{g}} \subset \Omega_{\mathfrak{g}}$, для которого $E_{\infty} \neq 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G/Γ – компактное солвмногообразие, отвечающее вполне разрешимой группе Ли G , $\mathfrak{g}$ – соответствующая алгебра Ли, ω – замкнутая 1-форма на G/Γ . $H_{\lambda\omega}^*(G/\Gamma, \mathbb{C}) \neq 0$, если и только если $-\lambda[\omega] \in \{0\} \cup \tilde{\Omega}_{\mathfrak{g}}$, где $\tilde{\Omega}_{\mathfrak{g}}$ – некоторое конечное подмножество в $H^1(G/\Gamma, \mathbb{R})$, определенное в терминах алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

ПРИМЕР. Рассмотрим полупрямое произведение $G_0 = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$, причем $\mathbb{R}$ действует на $\mathbb{R}^2$ посредством

$$t \rightarrow \phi(t) = \begin{pmatrix} a^t & 0 \\ 0 & a^{-t} \end{pmatrix},$$

где $a + a^{-1} = n \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$, $a > 0$. Тогда $\phi(1)$ сопряжена некоторой матрице из $SL(2, \mathbb{Z})$, а значит, существует решетка $L \subset \mathbb{R}^2$, инвариантная относительно $\phi(1)$. Определяем решетку $\Gamma \subset G_0$ как полупрямое произведение $\mathbb{Z} \ltimes_{\phi(1)} L$. Рассмотрим соответствующее солвмногообразие $M = G_0/\Gamma$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ группы G_0 изоморфна алгебре, заданной базисом e_1, e_2, e_3 и коммутационными соотношениями $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = -e_3$. В двойственном базисе $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ дифференциал d устроен следующим образом: $d\omega_1 = 0$, $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$, $d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_3$. Таким образом, $H_{\lambda\omega}^*(\mathfrak{g}_0) \neq 0$ при $\lambda\omega = 0, \pm\omega_1$. Для чисел Бетти $b_{\lambda\omega}^p(M) = \dim H_{\lambda\omega}^p(G_0/\Gamma) = \dim H_{\lambda\omega}^p(\mathfrak{g}_0)$ солвмногообразия $M = G_0/\Gamma$ имеем:

- 1) $b_{\pm\omega_1}^0(M) = 0$, $b_{\pm\omega_1}^1(M) = b_{\pm\omega_1}^2(M) = 1$, $b_{\pm\omega_1}^3(M) = 0$;
- 2) $b^0(M) = b^1(M) = b^2(M) = b^3(M) = 1$.

Автор благодарен Л. А. Алания за стимулирующие обсуждения и интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. П. Новиков // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. №6. С. 1321–1324. [2] А. В. Пажитнов // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. №6. С. 1305–1307. [3] Л. А. Алания // УМН. 1999. Т. 54. №5. С. 147–148. [4] Д. В. Миллионщиков // УМН. 2001. Т. 56. №4. С. 153–154. [5] A. Hattori // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I. 1960. V. 8. №4. P. 289–331. [6] М. Рагунатан. Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977. [7] J. Dixmier // Acta Sci. Math. (Szeged). 1955. V. 16. P. 246–250.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: million@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
23.05.2002