Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Проскурников, Ю. Р. Романовский, О регулярных триангуляциях невыпуклых многогранников, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm546>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:16:03

О РЕГУЛЯРНЫХ ТРИАНГУЛЯЦИЯХ НЕВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

А. В. ПРОСКУРНИКОВ, Ю. Р. РОМАНОВСКИЙ

Триангуляцией многогранника называется его разбиение на симплексы, которые пересекаются между собой по целым граням. Важный класс триангуляций составляют регулярные, или когерентные, триангуляции [1]. В работе [2] приведен алгоритм описания всех регулярных триангуляций выпуклого многогранника. Мы обобщаем его на случай невыпуклых тел. Мы также обсуждаем вопрос о построении регулярных триангуляций невыпуклых тел с дополнительными точками (точками Штейнера).

Авторы благодарны С. В. Дужину за предложение заняться данной тематикой в рамках возглавляемого им проекта по вычислительной геометрии, а также за внимание к работе и обсуждение результатов. Мы также считаем своим приятным долгом поблагодарить Н. Е. Мнёва, обратившего наше внимание на теорию вторичных многогранников и снабдившего нас копиями ряда опубликованных по этой теории статей.

Пусть $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – набор n точек в $\mathbb{R}^d$, а $\mathbb{R}^{\mathcal{A}} \simeq \mathbb{R}^n$ – пространство вещественных функций на $\mathcal{A}$. Почти каждому вектору $\psi \in \mathbb{R}^n$ можно сопоставить триангуляцию $T = T(\psi)$ выпуклого (первичного) многогранника $\text{conv}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}^d$ построением выпуклой оболочки точек $(a_i, \psi_i) \in \mathbb{R}^{d+1}$ и проектированием ее нижней части на $\mathbb{R}^d$. Триангуляции, которые могут быть получены таким образом, называются *регулярными*. Векторы $\psi \in \mathbb{R}^n$, порождающие одну и ту же триангуляцию T , образуют конус $C(T)$. Семейство всех таких конусов $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ называют *вторичным веером*. Теорема Гельфанда, Зелевинского и Капранова [1] утверждает, что существует *вторичный многогранник* $\Sigma(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}^n$ размерности $n - d - 1$, нормальный веер которого совпадает с $\mathcal{F}(\mathcal{A})$. Конструктивное геометрическое описание $\mathcal{F}(\mathcal{A})$, основанное на методе диаграмм Гейла, дано в работе Биллеры, Филлимана и Штурмфелса [2]. Мы используем технику работы [2] для решения следующей задачи. Дан набор S симплексов (размерности не выше d) с вершинами в $\mathcal{A}$. Требуется либо найти *вынужденную* регулярную триангуляцию, т.е. такую регулярную триангуляцию T , что $S \subset T$, либо доказать, что ее не существует.

ТЕОРЕМА 1. *Задача о вынужденной регулярной триангуляции разрешима за время, полиномиально зависящее от n .*

Алгоритм устроен следующим образом.

1. Находим преобразование Гейла $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ конфигурации $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$.
2. Для каждого симплекса $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ (здесь σ_i – номера точек из $\mathcal{A}$, являющихся вершинами σ) находим конус $C(\sigma) = \text{cone}(b_{\sigma_1^*}, \dots, b_{\sigma_k^*})$, где σ^* – дополнение к подмножеству σ в $\{1, \dots, n\}$.
3. Находим конус вынужденных триангуляций $C(S) = \cap C(\sigma)$ по всем $\sigma \in S$.
4. Если $C(S) = \emptyset$, то вынужденной регулярной триангуляции не существует. В противном случае фиксируем вектор $\psi \in C(S)$ и образуем триангуляцию $T = T(\psi)$.

Доказательство полиномиальности опирается на работу Л. Г. Хачияна [3].

Задача о вынужденной триангуляции имеет непосредственное отношение к задаче триангуляции невыпуклых тел. В самом деле, *регулярной триангуляцией невыпуклого симплициального многогранника* $P \subset \mathbb{R}^3$ назовем вынужденную регулярную триангуляцию, отвечающую конфигурации $\mathcal{A}$ его вершин и набору S его граней. В этом случае указанный алгоритм проверит регулярную триангулируемость P без использования точек Штейнера. Подчеркнем, что при отказе от условия регулярности такая проверка становится NP-полной задачей [4]. Кроме того, условие регулярности вносит большую специфику в задачу триангуляции с использованием точек Штейнера. Оказывается, что если P нельзя регулярно триангулировать без точек Штейнера, то его нельзя регулярно триангулировать без добавления точек Штейнера на границу.

Работа выполнена при финансовой поддержке компании Шлюмберже.

ТЕОРЕМА 2. Пусть P – произвольный (не обязательно выпуклый) d -мерный многогранник, вершины которого содержатся в $\mathcal{A}$. Если существует регулярная триангуляция P с вершинами в $\mathcal{A}$, то существует регулярная триангуляция P с вершинами в $\mathcal{A} \cap \partial P$ (∂P – граница P).

Доказательство этой теоремы также может быть получено с помощью диаграмм Гейла.

ПРИМЕР. Рассмотрим невыпуклый многогранник с шестью вершинами, получающийся из треугольной призмы таким вращением верхнего основания относительно нижнего, что каждая боковая грань складывается в два треугольника с ребром возврата между ними (см. рисунок). Это звездный многогранник, введенный в работе Шёнхардта [5]. Его нельзя триангулировать без точек Штейнера. Если такую точку вставить внутрь ядра и соединить со всеми вершинами, то получится триангуляция, которая по теореме 2 нерегулярна. Тем не менее, многогранник Шёнхардта можно регулярно триангулировать, если вывести дополнительную точку на ребро возврата.

Возникает естественный вопрос: верно ли, что всякий невыпуклый многогранник можно регулярно триангулировать после добавления на его ребра точек Штейнера, число которых полиномиально зависит от n ? Н.Е. Мнёв (частное сообщение) утверждает, что это верно, если разрешить добавлять точки Штейнера не только на ребра, но и на грани.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский, М. М. Капранов // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 3. С. 1–62. [2] L. J. Billera, P. Filliman, B. Sturmfels // Adv. in Math. 1990. V. 83. P. 155–179. [3] Л. Г. Хачиян // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244. № 5. С. 1093–1096. [4] J. Ruppert, R. Seidel // Discrete Comput. Geom. 1992. V. 7. P. 227–253. [5] E. Schöhardt // Math. Ann. 1928. V. 98. P. 309–312.

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: anton@ap9560.spb.edu, romanov@yr2008.spb.edu

Принято редколлегией
23.05.2002