Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Прохоров, Замечание о разрешении трехмерных терминальных особенностей, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm547>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 12:42:36

ЗАМЕЧАНИЕ О РАЗРЕШЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕРМИНАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Ю. Г. ПРОХОРОВ

Пусть (Z, o) – трехмерная терминальная особенность индекса $r \geq 1$, пусть $\varphi: \tilde{Z} \rightarrow Z$ – ее разрешение, и пусть $S \subset \tilde{Z}$ – исключительный дивизор такой, что $\text{Center}(S) = o$. Ясно, что бирациональный тип S не зависит от g . По [1; 2.14] поверхность S бирационально линейчатая. Мы говорим, что соответствующее дискретное нормирование $\nu = \nu_S$ поля функции $\mathcal{K}(Z)$ *рационально* (соответственно *бирационально линейчатое*) если такова поверхность S . Нас интересует существование рациональных исключительных дивизоров над $o \in Z$ с малыми дискрепантностями:

ТЕОРЕМА. Пусть (Z, o) – трехмерная терминальная особенность типа cA/r , $r \geq 1$, и пусть ν – дивизориальное дискретное нормирование поля $\mathcal{K}(Z)$ такое, что $a(\nu) \leq 1$ и $\text{Center}_Z(\nu) = o$. Тогда ν рационально.

Напомним, что согласно классификации [2], [3] особенность (Z, o) принадлежит одному из следующих классов: cA/r , $cAx/4$, $cAx/2$, $cD/2$, $cD/3$, $cE/2$, cD , cE . В серии работ [4; Приложение], [5], [6] было доказано, что для любого $i \in \mathbb{N} \setminus r\mathbb{N}$ существует исключительный дивизор S с центром в o и дискрепантностью $a(S) = i/r$ (см. также [7] и [8]). Отметим, что исключительные дивизоры с дискрепантностями < 1 появляются в любом разрешении. Дивизоры с дискрепантностью 1 и $\text{Center} = o$ появляются в любом *дивизориальном* разрешении, т.е. в разрешении таком, что исключительное множество имеет чистую коразмерность 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $F \in |-K_Z|$ – общий элемент. Тогда (F, o) – дювалевская особенность (типа A_n) [3; 6.4]. По обращению присоединения [9; 17.6] пара (Z, F) чисто логтерминальна. Пусть $q: Z^q \rightarrow Z$ – $\mathbb{Q}$ -факториализация (см., например, [9; 6.7]). Тогда Z^q имеет (терминальные) особенности типов cA/r_i . Действительно, поверхность $F^q := q^{-1}(F)$ содержит все особые точки многообразия Z^q и $F^q \in |-K_{Z^q}|$. Так как $F^q \rightarrow F$ – крепантный морфизм, то F^q может иметь особенности только типов A_{n_i} . Таким образом, заменяя Z на Z^q , мы можем считать, что Z $\mathbb{Q}$ -факториально.

Пусть S – исключительный дивизор с центром в o и дискрепантностью $a(S) \leq 1$. Тогда $a(S, F) < 1$. Так как $K_Z + F$ линейно тривиален, то мы имеем $a(S, F) \leq 0$. Далее, имеется 1-дополнение $K_F + \Theta$ для K_F вблизи o (см. [4; 5.2.3]). Согласно [10; 4.4.1] это дополнение может быть продолжено на Z , т.е. имеется (целый) дивизор Картье F' такой, что $F'|_F = \Theta$, $K_Z + F + F' \sim 0$ и пара $(Z, F + F')$ логканонична. Тогда $a(S, F + F') = -1$. Теперь наша теорема – следствие следующего простого факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть (Z, o) – трехмерная $\mathbb{Q}$ -факториальная терминальная особенность, и пусть ν – дивизориальное дискретное нормирование поля $\mathcal{K}(Z)$. Предположим, что существует граница D такая, что пара (Z, D) логканонична и $a(\nu, D) = -1$. Тогда

- (i) нормирование ν рационально или бирационально эквивалентно линейчатой поверхности над эллиптической кривой;
- (ii) если, кроме того, $[D]$ имеет по крайней мере две компоненты, проходящие через o , то ν рационально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [9; 17.10] существует раздутие $f: X \rightarrow Z$ с неприводимым исключительным дивизором S , представляющим нормирование ν , такое, что логдивизор $K_X + S + D_X = f^*(K_Z + D)$ логканоничен. Здесь D_X – собственный прообраз D . В этой ситуации имеем $\rho(X/Z) = 1$, следовательно, $D_X \equiv -(K_X + S)$ f -обилен.

Рассмотрим минимальную логтерминальную модификацию $g: Y \rightarrow X$ пары $(X, S + D_X)$ (см., например, [10; 3.1.3]), т.е. раздутие такое, что Y $\mathbb{Q}$ -факториально и

$$K_Y + S_Y + D_Y + E = g^*(K_X + S + D_X)$$

является дивизориально логтерминальным. Здесь S_Y, D_Y – собственные прообразы S и D_X соответственно, а $E = \sum E_i$ – (приведенный) исключительный дивизор с $a(E_i, S + D_X) = -1$. Обозначим $\Delta := \text{Diff}_{S_Y}(D_Y + \sum E_i)$ и $\Omega := f^*D_X|_{S_Y}$. По [9; 17.7] поверхность S_Y нормальна, а пара (S_Y, Δ) логканонична. Утверждение (i) легко следует из леммы ниже.

Чтобы доказать (ii), предположим, что поверхность S_Y нерациональна и дивизор $[D]$ приводим. Тогда $S \cap [D_X]$ имеет по крайней мере две неприводимые компоненты. То же самое верно для $S_Y \cap [D_Y + E]$. По лемме ниже $[\Delta]$ имеет в точности две компоненты (содержащиеся в $[D_Y + E]$) и пара (S_Y, Δ) чисто логтерминальна. Далее, $(S_Y, \Delta - \varepsilon\Omega)$ логтерминальна по Кавамате при $0 < \varepsilon$. Так как дивизор Ω численно эффективен и объемен, то для $0 < \varepsilon \ll 1$ пара $(S_Y, \Delta - \varepsilon\Omega)$ является логповерхностью дель Пеццо с логтерминальными по Кавамате особенностями. В этой ситуации поверхность S_Y рациональна (см., например, [10; 5.4.1]).

ЛЕММА. Пусть (S, Δ) – проективная логповерхность с $\kappa(S) = -\infty$. Предположим, что дивизор $K_X + \Delta$ логканоничен и численно тривиален и что поверхность S нерациональна. Тогда S – бирационально линейчатая поверхность над эллиптической кривой и существует не более двух дивизоров с дискрепантностью $a(\cdot, \Delta) = -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. [4; 6.9]). Заменим S на минимальное разрешение, а Δ – на крепантный прообраз. Имеется стягивание $\phi: S \rightarrow C$ (с общим слоем $\mathbb{P}^1$) на кривую C рода $p_a(C) \geq 1$. В этой ситуации пара (S, Δ) имеет лишь канонические особенности и все компоненты Δ горизонтальны [10; 8.2.2–8.2.3]. Следовательно, дивизоры с дискрепантностью $a(\cdot, \Delta) = -1$ – это в точности компоненты $[\Delta]$. Отсюда немедленно получается, что число дивизоров с дискрепантностью -1 не больше двух. Если $[\Delta] \neq 0$, то для любой компоненты $\Delta_i \subset [\Delta]$ имеем $2p_a(\Delta_i) - 2 \leq (K_S + \Delta) \cdot \Delta_i = 0$. Поэтому $p_a(C) \leq p_a(\Delta_i) \leq 1$. Осталось рассмотреть случай, когда пара (S, Δ) логтерминальна по Кавамате. Для любой компоненты $\Delta_i \subset \text{Supp}(\Delta)$ имеем $\Delta_i^2 \leq 0$ (иначе $(S, \Delta + \varepsilon\Delta_i)$ – логповерхность дель Пеццо с логтерминальными по Кавамате особенностями). Тогда, как и выше, $p_a(C) \leq p_a(\Delta_i) = \frac{1}{2}(K_S + \Delta) \cdot \Delta_i + 1 \leq \frac{1}{2}(K_S + \Delta) \cdot \Delta_i + 1 = 1$.

Отметим, что утверждение (ii) нашей теоремы неверно для других типов терминальных особенностей:

ПРИМЕР [4; Приложение]. Пусть (Z, o) – терминальная $sAx/2$ -особенность $\{x^2 + y^2 + z^{4m} + t^{4m} = 0\}/\mathbb{Z}_2(0, 1, 1, 1)$. Рассмотрим взвешенное раздутие с весами $\frac{1}{2}(2m, 2m + 1, 1, 1)$. Тогда исключительный дивизор S задается в $\mathbb{P}(2m, 2m + 1, 1, 1)$ уравнением $x^2 + z^{4m} + t^{4m} = 0$. Он приведен, неприводим и $a(S) = \frac{1}{2}$. Легко видеть, что S – бирационально линейчатая поверхность над гиперэллиптической кривой рода $2m - 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Reid // Journées de géométrie algébrique, Angers, France / ed. A. Beauville. Rockville: Sijthoff & Noordhoff, 1980. P. 273–310. [2] S. Mori // Nagoya Math. J. 1985. V. 98. P. 43–66. [3] M. Reid // Proc. Sympos. Pure Math. 1987. V. 46. P. 343–416. [4] В. В. Шокуров // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. С. 105–203. С приложением Ю. Каваматы. [5] D. Markushевич // J. Math. Sci. Tokyo. 1996. V. 3. № 2. P. 445–456. [6] В. В. Шокуров // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 2. С. 165–222. [7] V. V. Shokurov // J. Math. Sci. 1996. V. 81. № 3. P. 2667–2699. [8] Т. Hayakawa // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1999. V. 35. № 3. P. 515–570. [9] J. Kollár (ed.). Flips and Abundance for Algebraic Threefolds. Paris: Soc. Math. France, 1992. (Astérisque. V. 211.) [10] Yu. G. Prokhorov. Lectures on Complements on log Surfaces. Tokyo: Math. Soc. Japan, 2001. (Mem. Math. Soc. Japan. V. 10.)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: prokhorov@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
23.05.2002