Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Шкредов, Повторяемость неполных частных у цепных дробей, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm548>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:59:57

ПОВТОРЯЕМОСТЬ НЕПОЛНЫХ ЧАСТНЫХ У ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

И. Д. ШКРЕДОВ

1. Формулировка основного результата. Цепной дробью, соответствующей числу α , называется выражение $\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Число a_n называется n -м неполным частным числа α , а рациональное число $p_k/q_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ — подходящей дробью порядка k . Если $\alpha \in [0, 1)$, то будем писать $\alpha = [a_1, a_2, \dots]$. Все необходимые сведения о цепных дробях можно найти в [1].

Рассмотрим множество Λ_M цепных дробей с ограниченными неполными частными $a_n \leq M$ и зададим меру на нем следующим образом. Мера множества $\{\alpha \mid a_{n_1} \in A_1, \dots, a_{n_k} \in A_k\}$, $A_i \subseteq \{1, \dots, M\}$, равна $\prod |A_i|/M^k$, где $|A_i|$ означает количество элементов в A_i . Следующий метрический результат про повторяемость неполных частных сразу следует из теоремы о сим-вольном потоке [2].

Для почти всех (относительно меры, определенной выше) $\alpha = [a_1, a_2, \dots] \in \Lambda_M$ существует возрастающая последовательность номеров $\{n_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ такая, что

$$a_1 = a_{n_\nu+1}, \quad a_2 = a_{n_\nu+2}, \quad \dots, \quad a_{k_\nu} = a_{n_\nu+k_\nu} \quad (1)$$

и $k_\nu \geq \log_M n_\nu$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ мера тех $\alpha \in \Lambda_M$, для которых существует возрастающая последовательность $\{n_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ такая, что выполнено (1) и $k_\nu \geq (1 + \varepsilon) \log_M n_\nu$, равна нулю.

Сформулируем теперь наш основной результат.

ТЕОРЕМА. 1) Для любого $\varepsilon > 0$ и для почти всех (относительно меры Лебега) чисел α существует возрастающая последовательность номеров $\{n_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ такая, что выполнено (1) и $k_\nu \geq (6 \ln 2 / \pi^2 - \varepsilon) \cdot \ln n_\nu$. 2) Для любого $\delta > 0$ мера тех α , для которых существует возрастающая последовательность $\{n_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ такая, что выполнено (1) и $k_\nu \geq (1 + \delta) / \ln 2 \cdot \ln n_\nu$, равна нулю.

2. О количественной возвращаемости. Пусть X — метрическое пространство с метрикой $d(\cdot, \cdot)$ и сигма-алгеброй измеримых множеств Φ , которая содержит все борелевские множества. Пусть также T — измеримое, сохраняющее меру μ отображение X в себя. Всюду ниже будем считать, что $\mu(X) = 1$. Рассмотрим обычную меру Хаусдорфа $H_s(\cdot)$ на X . Будем говорить, что меры μ и H_s согласованы, если любое μ -измеримое множество является H_s -измеримым.

Следующую ниже теорему доказал М. Бошерниан в [3]. (Похожий результат независимо получил Н. Г. Мошевитин в [4].)

ТЕОРЕМА (Бошерниан). Пусть X — метрическое пространство, H_s и μ согласованы, для любого μ -измеримого A $\mu(A) = H_s(A)$ и T — отображение X в себя, сохраняющее меру μ . Тогда для почти всех $x \in X$ выполнено $\liminf_{n \rightarrow \infty} \{n^{1/s} d(T^n x, x)\} \leq 1$.

3. О пространстве последовательностей. Как известно, преобразование Гаусса $Tx = \{1/x\}$, $x \neq 0$, $T0 = 0$, является левым сдвигом при разложении в цепную дробь и сохраняет меру $\nu(A) = 1/\ln 2 \int_A \frac{1}{1+x} dx$, которая эквивалентна мере Лебега.

Обозначим через P_k отображение из пространства бесконечных цепных дробей в конечные цепные дроби $P_k([a_1, a_2, \dots]) = [a_1, \dots, a_k]$. Интервалом k -го ранга $I_k = I_k(a_1, \dots, a_k)$ называются все числа α , у которых цепные дроби начинаются с $a_1, \dots, a_k$. Рассмотрим неархимедову метрику на пространстве последовательностей $[a_1, a_2, \dots]$:

$$D([a_1, a_2, \dots], [b_1, b_2, \dots]) = \begin{cases} 1, & \text{если } P_1([a_1, a_2, \dots]) \neq P_1([b_1, b_2, \dots]), \\ \nu(I_k(a_1, \dots, a_k)) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $k \geq 1$ — максимальное такое, что $P_k([a_1, a_2, \dots]) = P_k([b_1, b_2, \dots])$.

Меры H_1 и ν согласованы. Достаточно проверить согласованность на $C_{n_1, \dots, n_k}(A_1, \dots, A_k) = \{\alpha \mid a_{n_1} \in A_1, \dots, a_{n_k} \in A_k\}$, где $A_i \subseteq \mathbb{N}$. Покрывая любой такой цилиндр C элементарными цилиндрами $I_k(a_1, \dots, a_k)$, убеждаемся, что $\nu(C) \leq H_1(C)$. Обратно, из определения метрики $D(\cdot, \cdot)$ следует, что любое покрытие C может быть заменено на покрытие элементарными цилиндрами, откуда вытекает равенство мер H_1 и ν .

4. Доказательство теоремы. 1) Так как H_1 и ν согласованы, то по теореме Бошернаца для почти всех α и, следовательно, для их соответствующих разложений в цепные дроби $\alpha = [a_1, a_2, \dots]$ существует последовательность номеров $\{n_\nu\}$ такая, что

$$n_\nu D(\alpha, T^{n_\nu} \alpha) \leq 1. \quad (2)$$

По определению метрики $D(\cdot, \cdot)$ $D(\alpha, T^{n_\nu} \alpha) = \nu(I_k)$, где $k = k_\nu$ есть максимальное такое, что $a_1 = a_{n_\nu+1}, a_2 = a_{n_\nu+2}, \dots, a_{k_\nu} = a_{n_\nu+k_\nu}$.

По известной теореме Хинчина–Леви [1] для любого $\varepsilon > 0$ и для почти всех чисел α существует $M = M(\alpha)$, начиная с которого $q_n < (\gamma + \varepsilon)^n$. Так как k_ν возрастают, то можно считать n_1 настолько большим, что $k_1 > M$. Тогда [1] $\nu(I_k) = O(|I_k|)$. Следовательно, по (2) $k_\nu \geq (6 \ln 2 / \pi^2 - \varepsilon_1) \ln n_\nu$.

2) Следуя [1], обозначим через $M_n(x)$ меру множеств чисел α отрезка $[0, 1]$, удовлетворяющих условиям $a_1 = r_1, a_2 = r_2, \dots, a_k = r_k; z_{k+n} < x$, где $z_{k+n} = [a_{n+k+1}, a_{n+k+2}, \dots]$ и $0 \leq x \leq 1$. Тогда для выполнения условий

$$a_1 = r_1, a_2 = r_2, \dots, a_k = r_k; a_{n+k+1} = r_1, a_{n+k+2} = r_2, \dots, a_{n+2k} = r_k \quad (3)$$

необходимо и достаточно, чтобы z_{k+n} принадлежал интервалу k -го ранга $I_k = I(r_1, \dots, r_k) = (\delta_1, \delta_2)$, $\delta_1 = p_k/q_k, \delta_2 = (p_k + p_{k-1})/(q_k + q_{k-1})$, длины $1/(q_k(q_k + q_{k-1}))$. Обозначим множество всех чисел, удовлетворяющих (3), через $P_n(r_1, \dots, r_k)$, тогда $\mu(P_n(r_1, \dots, r_k)) =$

$\int_{\delta_1}^{\delta_2} M'_n(x) dx$. Как известно [1; с. 101], последовательность функций $M'_0(x), M'_1(x), \dots$ удовлетворяет функциональному уравнению Кузьмина и по [1; теорема 33] мера $P_n(r_1, \dots, r_k)$ есть

$$\left| \frac{1}{\ln 2(q_k(q_k + q_{k-1}))} \log \left(1 \pm \frac{|I_k|}{1 + \frac{p_k}{q_k}} \right) \right| + O(|I_k| e^{-\lambda \sqrt{n}}) \ll |I_k|^2 + |I_k| e^{-\lambda \sqrt{n}}. \quad (4)$$

Рассмотрим множества P_N тех α , у которых

$$a_1 = a_{N+1}, a_2 = a_{N+2}, \dots, a_K = a_{N+K},$$

и $K = [\log_2 N^{1+\delta}]$, где $\delta > 0$ – любое. Тогда множество $E = \bigcap_{M \geq 1} \bigcup_{N \geq M} P_N$ есть множество чисел, для которых бесконечно много раз выполняется (1). Оценим меру каждого P_N , $\mu(P_N) = \sum_{r_1, \dots, r_K} \mu(P_{N-K}(r_1, \dots, r_K))$. Так как $\sum_{r_1, \dots, r_K} |I_K| = 1$, то по (4) $\mu(P_N) \ll \sum_{r_1, \dots, r_K} |I_K|^2 + e^{-\lambda \sqrt{N-K}}$.

Пусть $S_k = \sum_{r_1, \dots, r_k} |I_k|^2$. Докажем, по индукции, что $S_k \leq (1/2)^k$. Для S_0 это очевидно. S_k представляет собой сумму площадей квадратов со сторонами, равными длинам интервалов k -го ранга. Возьмем любой такой интервал $I_k = (p_k/q_k, (p_k + p_{k-1})/(q_k + q_{k-1}))$. Он разбивается на интервалы $(k+1)$ -го ранга $I_{k+1}^1, I_{k+1}^2, \dots$, длины которых убывают. $|I_{k+1}^1|/|I_k| \leq 1/2$, значит, $S_{k+1} \leq (1/2) \sum_{I_k} |I_k|^2 = S_k/2 \leq (1/2)^{k+1}$, что и требовалось. Таким образом,

$$\sum_{N=1}^{\infty} \mu(P_N) \leq \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{1+\delta}} < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{N=1}^{\infty} e^{-\lambda \sqrt{N-(1+\delta) \log_2 N}} < \infty.$$

Значит, по лемме Бореля–Кантелли мера множества E равна нулю. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Я. Хинчин. Цепные дроби. М.: Наука, 1978. [2] F. Spitzer. Principles of Random Walk. Princeton: Van Nostrand, 1964. [3] M. D. Boshernitzan // Invent. Math. 1993. V. 113. № 3. P. 617–631. [4] Н. Г. Мошевитин // УМН. 1999. Т. 53. № 1. С. 223–224.