Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Арнольд, И. Г. Петровский, топологические проблемы Гильберта и современная математика, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 4, 197–207

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm549>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:01:46

И. Г. ПЕТРОВСКИЙ, ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА
И СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

В. И. АРНОЛЬД

Французская “Газета математиков” за январь 2002 года (№ 91) представила читателям И. Г. Петровского как “великого математика, известного своими параболическими уравнениями” (в статье Ж. Тронеля: Ольга Арсеньевна Олейник, 1925–2001, с. 44).

Аналогичное определение Адамара было бы “известный как автор леммы Адамара, позволяющей делить гладкую функцию на ее аргумент” и можно было бы определять Гильберта как “автора гильбертова пространства”, а Римана – как “изобретателя римановой метрики”.

И. Г. Петровский был одним из создателей московской математической школы, был ректором Московского Университета около двадцати его лучших лет, был организатором Международного конгресса математиков 1966 года в Москве.¹ Он был одним из самых глубоких и творческих математиков двадцатого века.

Работы И. Г. Петровского о шестнадцатой проблеме Гильберта легли в основу заложенной им новой науки – *вещественной алгебраической геометрии* (которая сегодня продолжает активно развиваться, см., например, обзоры [1] и [2]).

Эта проблема Гильберта состоит в том, чтобы *дать топологическую классификацию вещественных алгебраических кривых и многообразий (фиксированной степени)*. Это – одна из основных и вечных проблем математической науки, важная и для многих ее приложений (где эти кривые и многообразия описывают законы природы). *Как выглядят алгебраические кривые*, и сегодня неизвестно уже, например, для плоских кривых степени 8, состоящих из 22 связанных овалов (а большим двадцати двух число компонент связности плоской проективной кривой степени 8 быть не может по обсуждаемой ниже теореме Харнака). Алгебраические геометры мало помогли здесь: они не любят реальные ($\mathbb{R}$) проблемы.

Число 22 появляется из комплексных соображений о роде римановой поверхности кривой, равному 21, для кривой степени 8. Кривые второй степени (эллипсы и гиперболы, составляющие на проективной плоскости один класс) были изучены уже древними, и проблема состоит в продолжении этой классической теории: нужно узнать, как выглядят кривые больших степеней. Узнать это трудно и человеку, и компьютеру (хотя проблема алгоритмически разрешима).

Ньютон и Декарт исследовали кривые степеней 3 и 4. Случай кривых степени 6 изучался Гильбертом, который включил его исследование в свою 16-ю проблему на Математическом конгрессе 1900 года в Париже, где он сформулировал и свой результат о расположении на плоскости тех одиннадцати овалов, из которых может состоять алгебраическая кривая степени 6 (род римановой поверхности которой равен 10).

Топологически возможные расположения одиннадцати овалов на плоскости 1812. Результат Гильберта состоял в том, что из всех этих расположений *алгебраическими* кривыми степени 6 реализуются только два расположения.

¹Статья писалась в расчете на французского читателя, поэтому в ней содержатся и хорошо известные в России сведения.

Этот результат Гильберта ошибочен, как показал семьдесятю годами позже Д. А. Гудков, бывший учеником и И. Г. Петровского, и физика А. А. Андропова. Гудков показал, что реализующихся расположений не два, а три.²

Почувствительно, что, хотя задача кажется доступной компьютеру, компьютеры пока не сыграли никакой роли в решении этих труднейших математических задач (как и алгебраические геометрии).

А. А. Андронов, следовавший за А. Пуанкаре, был основателем *теории рождения предельных циклов* (несправедливо называемой теперь теорией “бифуркации Хопфа”), а также (с Л. С. Понтрягиным) – теории *структурной устойчивости* динамических систем (в его терминологии – “грубости”).

Работы Гудкова [3], развитые Арнольдом [4] и Рохлиным [5], *связали вещественную алгебраическую геометрию кривых* (и тем самым – работы Петровского) *с топологией гладких четырехмерных многообразий, а через нее – с квантовой теорией поля, арифметикой квадратичных форм* и т. д. Эта трудная область занимает в математике весьма центральное место.

Источником всего современного развития большой новой науки – вещественной алгебраической геометрии – являются идеи и результаты И. Г. Петровского, который открыл замечательные теоремы, оценивающие сверху топологические инварианты вещественных алгебраических многообразий через степени задающих эти многообразия уравнений, доказав для значений этих инвариантов так называемые неравенства Петровского (обобщающие приведенное выше ограничение числа овалов). Первые его результаты этого направления опубликованы в 1933 году [6], а подробные доказательства появились в 1938 году в его статье [7] (представленной в *Annals of Mathematics* С. Лефшецем).

Неравенства, оценивающие сверху числа Бетти вещественных алгебраических проективных многообразий любой размерности, были затем опубликованы И. Г. Петровским и его ученицей О. А. Олейник ([8], [9]). Правые части этих оценок комбинаций чисел Бетти сверху являются сложно описываемыми в [9] многочленами от степеней задающих многообразия уравнений. Подобные неравенства были переоткрыты пятнадцатью годами позже Милнором [10] и Томом [11], оценки которых, однако, гораздо слабее: числа, которыми они оценивают сверху комбинации чисел Бетти, больше (иногда во много раз), чем найденные Петровским и Олейник реалистические оценки сверху, которые часто достигаются.³

²Теория Гудкова приводит к выводу (переносимому и на кривые высших степеней), что эйлерова характеристика многообразия с краем из максимального (равного одиннадцати) числа компонент, где отрицателен задающий кривую шестой степени на плоскости (положительный на бесконечности) многочлен шестой степени от двух переменных, эта характеристика дает при делении на 8 не зависящий от кривой остаток (равный здесь 1). Сравнения по модулю восемь проявляются тут по глубоким топологическим причинам для кривых любой степени. Соответствующие три расположения 11 овалов кривой степени шесть таковы: ровно один из овалов содержит другие в ограниченной им области, и число этих внутренних овалов – либо 1, либо 5, либо 9. Для кривых степени $2k$ эйлерова характеристика сравнима с k^2 по модулю 8: это сравнение я назвал “сравнением Гудкова”. Гильберт пропустил наиболее трудный случай пяти внутренних овалов кривой степени шесть. Уже этот частный случай дает ясное представление о трудности этой замечательной шестнадцатой проблемы, продвижению в которой способствовали не компьютеры, а самые лучшие математики, открывшие и неравенства Петровского, и сравнения Гудкова, использовавшие вдобавок восходящие к Пуанкаре и физикам идеи теории бифуркаций. Андронов развивал эти идеи Пуанкаре ради приложений к радиофизике и проектированию радиопередатчиков. В позднейших изданиях замечательной “Теории колебаний” Андропова и Хайкина указано, что “фамилия третьего автора книги (А. Витта) была в предыдущих (1937 г.) изданиях пропущена вследствие трагической ошибки”. Гудкова эта чаша миновала.

³Том указал также на связь этих неравенств с более ранней теорией Смита, *оценивающей сверху сумму всех чисел Бетти вещественного многообразия суммой всех чисел Бетти многообразия всех комплексных точек, удовлетворяющих тем же уравнениям*:

$$\sum b_i(\mathbb{R}) \leq \sum b_j(\mathbb{C}).$$

В Москве фундаментальные результаты Петровского и Олейник были сразу же по достоинству оценены. Например, эти оценки составили алгебраическую основу результатов А. Г. Витушкина о *тринадцатой проблеме Гильберта, касающейся суперпозиций функций многих переменных, вроде $u(x, v(y, z))$* .

Витушкин [12] доказал, что представление всех p раз непрерывно дифференцируемых функций от n переменных в виде конечных комбинаций (суперпозиций по терминологии Гильберта) гладких функций от k переменных, непрерывно дифференцируемых q -кратно, *невозможно без потери гладкости*.

А именно, *для существования такого представления всех функций n переменных необходимо, чтобы дробь k/q , измеряющая сложность представляющих функций, была не меньше, чем сложность n/p представляемых функций*: слишком простыми функциями сложных не представишь!

Например, нельзя надеяться представить всякую трижды непрерывно дифференцируемую функцию от трех переменных комбинацией столь же гладких функций от двух переменных: если представление суперпозицией функций двух переменных и возможно, то порядок гладкости представляющих функций не может быть всегда большим двух, если разлагаемая 3-гладкая функция от трех переменных произвольна.

Доказательство этой фундаментальной теоремы *анализа* Витушкин основал на таинственно появляющихся тут неравенствах Петровского и Олейник из *вещественной алгебраической геометрии*, что еще раз показывает глубокое единство всей математики. Для вычислительной математики это продвижение в алгебре и в анализе тоже имеет фундаментальное значение.

Хотя эти теоретические и прикладные области кажутся далеко удаленными друг от друга, развитая Витушкиным [13] теория связала описанные выше абстрактные результаты с оценками *снизу неизбежной сложности вычислительных процедур численного анализа (включающих оценку снизу объема памяти и минимального числа операций, необходимых для нахождения с заданной точностью приближенного решения проблемы)*.

Эти теории Витушкина были затем развиты А. Н. Колмогоровым [14], создавшим для этого свою *теорию энтропии функциональных пространств*, из которой он, например, снова вывел теорему Витушкина о суперпозициях гладких функций. Теория Колмогорова доставляет своеобразный новый способ измерения “объемов” в бесконечномерных пространствах, где обычные объемы мало полезны.

С другой стороны, оценки сверху значений топологических инвариантов многообразий через степени их уравнений, полученные Петровским и Олейник, были перенесены А. Г. Хованским и другими моими учениками на более общий случай произвольных *многогранников Ньютона уравнений* (оценка через степени уравнений соответствует частному случаю, когда эти многогранники – стандартные симплексы). Многогранник Ньютона многочлена – это граница выпук-

Теория Смита опубликована по-русски в виде приложения к книге Лефшеца о топологии. Для гладких алгебраических кривых неравенство Смита превращается, как это объяснено ниже, в теорему Харнака: *число компонент связности вещественной кривой не превосходит числа $g + 1$* , где g – род (число ручек) римановой поверхности кривой, т.е. множества ее комплексных точек. Ибо каждая компонента связности вещественной кривой вносит по единичке в нульмерное (b_0) и в одномерное (b_1) числа Бетти, так что сумма чисел Бетти гладкой вещественной кривой есть удвоенное число овалов. Сумма чисел Бетти римановой поверхности составляется из двух единиц (в размерностях 0 и 2) и $2g$ (это – число независимых одномерных циклов: “параллелей” и “меридианов” ручек). Итак, неравенство Смита для кривой принимает вид теоремы Харнака:

$$(2(\text{число овалов}) = b_0(\mathbb{R}) + b_1(\mathbb{R})) \leq (b_0(\mathbb{C}) + b_1(\mathbb{C}) + b_2(\mathbb{C}) = 2 + 2g).$$

Вещественные кривые со столь большим числом овалов существуют.

Неравенства Петровского и Олейник доставляют подобные же оценки для алгебраических многообразий всех размерностей. Род гладкой плоской кривой степени n дается полиномиальной формулой Римана $g = (n-1)(n-2)/2$ (это 10 при $n = 6$ и 21 при $n = 8$). Многочлены Олейник [9] играют аналогичную этому многочлену Римана роль в многомерном случае, но записываются сложнее, так что в Том заменил их большими, но легче выписываемыми выражениями.

лой оболочки показателей степеней входящих в него одночленов, рассматриваемых как точки векторного пространства многомерных показателей степени.

Построенная таким образом “геометрия формул” привела к значительным достижениям, в том числе к теории “малочленов” К. Севастьянова и А. Г. Хованского [15]. Эта теория оценивает топологическую сложность алгебраического многообразия сверху через введенную в анализ Ньютоном и развитую Эйлером *стереометрию выпуклых многогранников в пространстве показателей степени* и через их обычные и смешанные объемы.⁴ Теория многочленов оценивает сверху топологическую сложность многообразия в терминах числа одночленов, составляющих входящий в уравнение многочлен, независимо от их степеней. Она является также грандиозным обобщением “правила Декарта”, оценивающего сверху число положительных корней многочлена через число перемен знаков в последовательности его коэффициентов. Ньютон не зря считал свое предвосхищающее ряды и интегралы Фурье изобретение того, что теперь называют многогранниками Ньютона, важнейшим из своих математических достижений.

Замечу еще, что эта теория топологической сложности продолжается с задач топологической геометрии на задачи теории дифференциальных уравнений, где она доставляет *оценки сверху топологической сложности интегральных кривых или поверхностей через число одночленов, входящих в задающие эти кривые или поверхности дифференциальные уравнения*. Причем эта конструкция допускает даже итерацию: коэффициентами уравнений можно брать функции, полученные на предыдущем этапе такой же итерируемой процедуры.

Этот переход от алгебраических уравнений к дифференциальным напоминает переход Абеля от доказательства неразрешимости алгебраических уравнений пятой степени в радикалах к доказательству непредставимости элементарными функциями абелевых интегралов вдоль кривых рода один и выше.

Вернемся к сложно описываемым многочленам, входящим в неравенства Петровского и Олейник. Их анализ оказался очень полезным.

Продумывая сложные многочленные формулы, входящие в неравенства Петровского–Олейник (и встретившиеся мне также в теории смешанных структур Ходжа–Делиня особенностей, частично предвосхищенной этими неравенствами, как было в 1978 году объяснено в [16]), я, около 1985 года, подсказал И. М. Гельфанду, что и сложные формулы его теории гипергеометрических функций многих переменных, и классические формулы теории представлений групп, начиная уже с формул для коэффициентов Клебша–Гордана, могут сильно упроститься, если *заменить в них громоздкие алгебраические выражения объемами и смешанными объемами просто описываемых многогранников или числами лежащих в них целых точек* (в трудах моего семинара [17] это – “задача 1985-13” на с. 61).

⁴Объем выпуклого многогранника в n -мерном векторном пространстве можно рассматривать как однородный *многочлен* степени n на пространстве многогранников (сумма которых определяется как множество сумм входящих в них векторов, следуя Минковскому).

Смешанный объем n таких многогранников – это симметрическая полилинейная функция от них, совпадающая с объемом на диагонали, т.е. когда все многогранники совпадают. Нетривиальный и полезный пример – смешанный объем двух отрезков на плоскости (формулу легко вывести из определения выше).

Как и понятие многогранника Ньютона, понятие смешанного объема относится к набору *самых фундаментальных* математических понятий (включающему, например, римановы поверхности и гипocyклоиды, эволюты и эвольвенты, кватернионы и ряды Пюизо, эллиптические кривые и эллиптические интегралы, огибающие, цепные дроби и правильные многогранники). Эти важнейшие понятия современное выхолащено-аксиоматическое преподавание, к сожалению, выкинуло почему-то (вероятно, по невежеству) из математических курсов. Многогранники Ньютона возвращаются в вычислительную математику в виде базисов Грёбнера, а ведь они должны были появляться рядом с теоремой о неявной функции.

Я с недоумением обнаружил, что кватернионов даже нет в УДК (напоминающем классификацию книг в романе “Кысь” Т. Толстой, где на одну полку попали Ушинский и Лобачевский, Языков и Шейнин, Носов и Телешов). Компьютерное сообщество мира готовит нам сейчас новую принудительную систему описания математических работ, которые все будут заменены адресами их универсального единого собрания.

Дело в том, что *объем выпуклой оболочки набора точек аффинного пространства выражается через координаты этих точек (или через коэффициенты уравнений граней этого выпуклого многогранника) сложными формулами*. Замена этих формул словами “объем” или “смешанный объем” и описанием многогранника часто сильно облегчает работу.

Сложно описанные в работе Олейник [9] многочлены типа риманова, оценивающие сверху комбинации чисел Бетти, выражают на самом деле объемы и числа целых точек в несложно описываемых многогранниках, встречающихся также и в теории смешанных структур Ходжа особенностей (см. [16]).

Эта моя программа 1985 года *замены сложных многочленов простыми многогранниками* была затем развита Гельфандом и его сотрудниками (ср. [18]), причем в одной из своих публикаций на эту тему они даже сослались на изобретателя этого замысла.

Таким образом, *описанные выше замечательные достижения Витушкина и Колмогорова, Хованского и Гельфанда являются косвенными следствиями идей, первоисточником которых были восходящие к И. Г. Петровскому оценки сверху топологических инвариантов вещественных алгебраических кривых*.

Не зная того, Петровский способствовал прогрессу в исследовании суперпозиций и 13-й проблемы Гильберта.

Это – тоже одна из фундаментальнейших и стариннейших проблем математики: речь идет о степени сложности решения алгебраических уравнений, например, универсального⁵ уравнения седьмой степени, явно указанного Гильбертом при формулировании его тринадцатой проблемы:

$$x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0.$$

Уравнение Гильберта можно рассматривать как определяющее семизначную функцию x от трех переменных (a, b, c) . Невозможность представить эту функцию в виде суперпозиции функций от двух переменных явилась бы естественным продолжением теоремы Абеля о неразрешимости в радикалах уравнений степени 5 и выше.

Можно предполагать, что эта *комплексная алгебраическая функция x от трех комплексных переменных a, b, c непредставима суперпозицией непрерывных комплексных функций двух комплексных переменных, если каждая из этих функций двух переменных топологически эквивалентна комплексной алгебраической функции*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Возможность представления вещественных 3-гладких функций трех переменных q -гладкими функциями двух переменных неизвестна для $q \leq 2$ (для больших q представление невозможно). Однако только лишь непрерывными ($q = 0$) функциями от двух переменных уже можно представить любую непрерывную функцию от трех вещественных переменных. Именно этот вопрос о непрерывных суперпозициях – *единственная топологическая проблема во всем списке проблем Гильберта*, где топологии касаются проблемы 13 и 16 (обычно пропускаемые поэтому в публикуемых обзорах проблем Гильберта). Мне кажется, вопрос о представлении суперпозициями алгебраических функций (или хотя бы гомеоморфных им комплексных многозначных функций нескольких комплексных переменных) был бы более разумным, чем избранная Гильбертом вещественно-топологическая формулировка (в которой его проблема решена).

Гильберт подчеркивал, что уравнение степени семь “сводится” к функциям от трех переменных, а к функциям от двух, кажется, не сводится.

⁵ *Универсальность* уравнения Гильберта состоит в том, что к этому уравнению сводятся (при помощи функций от меньшего числа переменных, например – радикалов) *все* уравнения седьмой степени. Эти сведения (преобразования Чирнгаузена) обобщают тот метод, при помощи которого решается квадратное уравнение: линейный член уничтожается заменой переменной. Для уравнения большой степени n можно свести число переменных коэффициентов к $n - 4$. Но, по мере роста n , изредка появляется возможность исключить еще несколько (k) переменных (при $n \geq N(k)$ для довольно таинственно растущей последовательности чисел N).

Уравнения степени пять решаются при помощи одной алгебраической специальной функции от одной переменной, а степени шесть – от двух, как это доказал Эрмит. Но невозможность обойтись здесь функциями от одной переменной не доказана.

Современные методы теории характеристических классов алгебраических функций [19], [20], основанные на теории кос, позволяют в этом направлении доказывать *непредставимость* “полными суперпозициями”. Полнота суперпозиции означает, что представляемая многозначная функция должна включать *все* значения, доставляемые представляющей суперпозицией. Например, m -значная функция от n -значной имеет, в качестве полной суперпозиции, ровно mn значений, а не меньше, так что *функция $\sqrt{x} + \sqrt{4x}$ не равна $3\sqrt{x}$ и, в отличие от последней, имеет, как полная суперпозиция, не два, а четыре значения.*

Классические формулы для решения в радикалах уравнений степеней 3 и 4 – не полные суперпозиции, так как эти радикальные многозначные выражения доставляют, наряду с искомыми корнями, еще и “паразитные” значения. Новые методы, основанные на исследовании *когомологий групп кос* (см. [19]), доказывают, что эти *паразитные значения неизбежны*: без них неразрешимы в радикалах уже и уравнения младших степеней.

Самой, вероятно, глубокой работой Петровского была его *теория* [21] “*лакун*” для систем гиперболических уравнений (описывающих распространение волн).

Возможность *акустической связи* в трехмерном (и, более общим образом, в нечетномерном) пространстве зависит от наличия у акустической волны в нечетномерном пространстве *заднего фронта*.

Звуковая волна, испускаемая источником конечное время, проходит точку трехмерного пространства без остатка, она затихает в этой точке через некоторое время полностью. В двумерном (или ином четномерном) мире дело обстоит иначе: *здесь нет четкого заднего фронта, так что уже прошедший точку приема сигнал продолжает там быть слышимым бесконечно долго и мешает приему последующих сигналов, делая акустическую связь невозможной.*⁶

Теория лакун Петровского дает *топологическое объяснение* этих явлений диффузии волн или резкого заднего фронта (включая их обобщение на системы гиперболического типа, описывающие различные волны, распространяющиеся в одном направлении, как, например, в сейсмологии).

⁶При моей попытке объяснить эту трудность акустической связи читателям “Gazette des Mathématiciens” французский редактор заменил мои слова “акустическая связь” и “задний фронт” на “распространение звука” и “ретроградный фронт”. Слово “ретроградный” означает “потянувшийся назад”. “Авангард” армии и ее “арьергард” движутся, подобно голове лошади и ее хвосту, в одну сторону, и задний фронт волны, как и арьергард в армии, как и хвост лошади, вовсе не ретрограден. Ретрограды лишь журналисты и математики, берущиеся править не понимаемые ими тексты.

В “Известиях” от 8 февраля 2002 г. мои слова о плане школьной реформы “таким образом, план состоит в том, чтобы *полностью отменить* обучение всем практическим знаниям и предметам” были заменены на “. . . чтобы *отдать предпочтение* . . .”. Как жаль, что это измененное газетой утверждение ошибочно!

Разница между акустическими сигналами, принятыми в данной точке трехмерного и двумерного пространства, ясна на следующих двух графиках (где ось абсцисс (времени) направлена слева направо, а изображающие сигнал ординаты написаны на соответствующих точках оси абсцисс). В трехмерном случае сигнал принимается в виде, например:

$$\dots 0000A13675283B0000\dots (\rightarrow t);$$

здесь A – передний фронт, а B – задний.

В двумерном случае четкого заднего фронта нет, волна “диффундирует”: принимаемый сигнал имеет вид последовательности вроде

$$\dots A12367528341021321121101\dots (\rightarrow t).$$

В отличие от акустической связи, *распространение звука* одинаково хорошо происходит в пространствах и четной, и нечетной размерности (вопреки мнению редактировавших меня ретроградов).

И. Г. Петровский обнаружил причину *резкого заднего фронта и “лакун” в топологии вещественных и комплексных алгебраических многообразий, задающих конус нулей сим-вола системы (“конус Френеля” или “дисперсионное соотношение”)*. Для этого он определил специальный цикл – теперь называемый “циклом Петровского”, – гомологические свойства которого определяют характер распространения волн (порождая лакуны и четкий задний фронт волны в одних случаях и диффузию волн – в другом).

Работы И. Г. Петровского о вещественной алгебраической геометрии смыкаются здесь с его исследованиями уравнений в частных производных. Последние исследования включают также замечательные результаты о *системах эллиптического типа* (в том числе значительный вклад в начатое С. Н. Бернштейном исследование вопроса об аналитичности решений, входящего в девятнадцатую проблему Гильберта), а также его *теорию параболических систем* (упомянутую даже в цитированной выше статье в “Gazette des Mathématiciens”).

Не следует забывать и о вкладе И. Г. Петровского в *теорию нелинейных волн* (знаменитая статья “КПП” [22] Колмогорова, Петровского и Пискунова о скорости распространения возмущений в нелинейных средах заложила основы большой теории и в физике, и в механике, и в математике, к которой эта посвященная экологической проблеме статья формально относится).

А. Н. Колмогоров рассказывал мне, что математическая техника в этой статье была развита в основном именно И. Г. Петровским, в то время как сам Колмогоров выступал здесь, скорее, как физик. Аналогична и история другой знаменитой статьи А. Н. Колмогорова, написанной совместно с физиком М. А. Леонтовичем (о площади окрестности броуновской траектории). В этой статье “физическая” часть выполнена математиком (А. Н. Колмогоровым), а математическая техника (включая нетривиальный топологический анализ монодромии комплексных интегралов при изменении параметров) – дело рук физика (М. А. Леонтовича, заведовавшего впоследствии теоретической частью проекта ТОКАМАК управляемой термоядерной реакции). Математика – часть физики, и лучшие математики очень для физики полезны (вовсе не вычислениями и техникой).⁷

Я не стану здесь описывать вклад И. Г. Петровского в развитие советских технологических проектов: прежде чем стать ректором крупнейшего в России университета, он отвечал за математические вычисления, необходимые для производства важных (и неназываемых) “объектов”. И. Г. Петровский рассказывал мне, что эта утомительная работа дала ему возможность *оценить таланты многочисленных коллег по критериям, резко отличающимся от математических*. Приводить его ядовитые критические замечания в адрес разных математиков я не буду, но упомяну, что он очень хвалил, как нужную, деятельность Л. В. Канторовича и И. М. Гельфанда в качестве прикладных математиков описанного выше направления.

Возвращаясь к лакунам, замечу, что статья [21] 1945 года была столь трудна (взаимодействием между уравнениями с частными производными и алгебраической геометрией), что значительная часть этой теории была освоена специалистами в этих областях лишь много позже, когда Атья, Ботт и Гординг опубликовали две свои длинные статьи ([23], [24]), объясняющие эту работу И. Г. Петровского.

⁷ Влияние физиков, например А. А. Андропова, на математику (например, на работы Гудкова и Понтрягина) тоже огромно. Менее известен математикам фундаментальный вклад учителя Андропова, Л. И. Мандельштама, в теорию структурной устойчивости: он написал (в предисловии к книге Андропова и Хайкина), что *структурная устойчивость* (называвшаяся тогда грубостью) – *свойство не системы, а наших вопросов о ней*: если эти вопросы (вроде вопроса о топологической классификации фазовых портретов многомерных динамических систем) слишком тонки, то ответ может оказаться неустойчивым по отношению к малому изменению параметров даже типичной системы, и тогда искусство исследователя должно проявляться в *выборе менее детального описания системы, которое уже было бы структурно устойчивым* (“грубым”).

Все значение этой точки зрения стало ясно только в 1965 году, когда Смейл построил примеры структурно неустойчивых многомерных систем общего положения. Но математики еще далеки от реализации программы Мандельштама исследования этого хаоса, отчасти, вероятно, вследствие своего незнакомства с идеями физика. Для физиков же предмет чересчур труден.

Ж. Лере говорил мне, что он долго не мог понять Петровского из-за того, что тот написал, будто *касательное расслоение любой сферы тривиально* (что на самом деле верно лишь для сфер размерностей 1, 3 и 7). Разумеется, Петровский использовал лишь *локальную* тривиальность расслоения. Но подобные мелкие оговорки могут давать свой вклад в то явление (осуждавшееся в этом же разговоре 1965 года самим Лере), что ни Петровский, ни Понтрягин, ни Колмогоров не входят в число лауреатов медали Филдса (подобно тому, как нобелевскую премию по литературе дали не Толстому, а Сюзли Прудону, а в медицине пренебрегли Пастером).

В число медалистов не входят, к сожалению, ни Лере, ни Г. Вейль, ни Черн, ни Морс, ни Уитни – привожу лишь первые приходящие в голову великие имена. Колмогоров считал высшей наградой математику избрание в почетные члены Лондонского математического общества.

К счастью, ни Нобелевские, ни Филдсовские награды, ни проблемы Гильберта не оказывают большого влияния – эти мнения могут сильно различаться у тех, кто, как я, знает, что $2 + 3 = 5$, и у тех, которые, подобно французскому первокласснику, считают, что это $3 + 2$, как их учили в школе, и кто затем награждает премиями и званиями своих презирующих конкретную науку единомышленников.

Оценка какой-либо математической теории Ньютоном или Пуанкаре имеет сегодня значительно больший вес, чем демократическое голосование десятков или даже сотен Лейбницев⁸ или Харди.⁹ Отчасти поэтому я решил не скрывать и своих мнений о замечательных математических достижениях – эти мнения могут сильно различаться у тех, кто, как я, знает, что $2 + 3 = 5$, и у тех, которые, подобно французскому первокласснику, считают, что это $3 + 2$, как их учили в школе, и кто затем награждает премиями и званиями своих презирующих конкретную науку единомышленников.

Практические явные вычисления, нужные для применения общей теории лагун Петровского к конкретным гиперболическим системам, сделали реально возможными только недавно, когда В. А. Васильев применил к этой трудной области мощные методы теории особенностей дифференцируемых отображений ([25]–[27]), ответив на вопросы Атьи, Ботта и Гординга о практических выводах из теоремы Петровского.

Я не поддамся соблазну описать здесь эту прекрасную новую теорию, но закончу свое очень неполное описание значения работ Петровского для современной математики упоминанием его *качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области (в стиле теории динамических систем Пуанкаре)*.

Замечу, впрочем, что, как и имя Петровского, имя геометра Пуанкаре “забыто” или подвергается дискриминации во Франции. На станции метро “Люксембург” в Париже висит план окружающих кварталов, на котором Институт Анри Пуанкаре надписан как “Institut Point-Carré”, т.е. “Институт Квадратной Точки”.

В письмах Пуанкаре я читал его возражения против подобной трактовки его фамилии: он

⁸Враг эксперимента и эпигон Ньютона, алгебраист Лейбниц думал (“правило Лейбница”), что дифференцирование – гомоморфизм, т.е. что производная произведения равна произведению производных сомножителей, и писал, что окружность кривизны пересекает общую гладкую плоскую кривую в *четыре* бесконечно близких точках. В своих (давно изданных по-русски Институт Маркса–Энгельса) сочинениях он писал, что “видел помесь крысы с кошкой” и что “Африка полна помесью людей с обезьянами”. Замечательно также его *математическое доказательство Бытия Божьего* (основанное на любви бурбакистов к дедукции).

⁹Харди писал в своей мракобесной недавно изданной по-русски “Апологии математика”, что “горчичный газ – самое гуманное оружие” и что “занятий математика достойны *только теория чисел и теория относительности*”, так как “только эти две области никогда не имели, не имеют и не будут иметь никаких приложений, особенно в военном деле” (ни о криптографии, ни об атомной бомбе он не подумал). Вдохновившись этими словами Харди, я занимался всю весну 2002 года приложениями теории относительности (“мира де Ситтера”) к теории чисел (к арифметике целочисленных квадратичных форм). Мир де Ситтера – это продолжение круга, внутренность которого реализует в этой модели плоскость Лобачевского. Оценивая значение математических результатов прошлого, Харди писал, что “без Абеля, Римана и Пуанкаре математика ничего не потеряла бы”. К сожалению, многие назначающие премии комитеты и сегодня руководствуются его идеями.

писал, что *точка не бывает квадратной, она круглая*, и объяснял происхождение своей фамилии скорее жесткостью *квадратного кулака* (“*poing carré*”) своего предка.

Несколько лет назад я уже обратил внимание Французского Математического Общества (во время доклада в Institut Henri Poincaré), что эту скандальную ошибку в RER надлежит исправить. В Москве исправление было бы немедленным (его добились бы такие ответственные математики, как И. Г. Петровский, не остававшийся равнодушным к несправедливостям).

Но во Франции никто и не шелохнулся. Напротив, “ряды Пуанкаре” градуированных алгебр в математических статьях ненавистники геометрии стали здесь последнее время называть “рядами Гильберта”. Даже в настоящей моей статье французский редактор пытался еще и заменить здесь имя Гильберта, для защиты последнего, именем астронома Хилла, коего французским математикам, по незнанию, не жалко; точно так же они пытались заменить ниже в моей статье неизвестного им великого геометра Энриквеса на “Энрико Бетти”.

В работах И. Г. Петровского о лагунах доказывается, между прочим, *представимость классов когомологий дополнений к проективным алгебраическим многообразиям дифференциальными формами с рациональными коэффициентами*.¹⁰ Этот результат Петровского на Западе обычно приписывают А. Гротендику, а неравенства Петровского–Олейник здесь обычно приписывают Тому и Милнору (хотя последние добросовестно ссылались и на своих российских предшественников, и на Смита).

Атя говорил мне, что его восхищает в работах Петровского высокий Энриквесовский стиль алгебраической геометрии. Петровский играл в Москве ту роль, которую для Германии сыграл Ф. Клейн: он реализовал *непрерывность математики*, соединяя современную теорию систем уравнений в частных производных с неизвестной остальным классической алгебраической геометрией в стиле Энриквеса и Римана, Эйлера, Абеля и Якоби. Борьба за единство математики – трудная, но благородная задача, актуальная и сегодня не меньше, чем при Петровском.

Издатели недавней московской статьи об О. А. Олейник приложили все усилия к тому, чтобы низвести ее до уровня автора многочисленных работ об одном свойстве одного решения одного уравнения. Они не согласились включить в статью приведенный выше анализ влияния ее замечательных достижений, сочтя мой текст “слишком математическим”.

Я особенно ясно понял отличие “современной” математики от своей любимой старой, когда мои парижские студенты заменили в моем собственном тексте фразу вроде “рассмотрим центр тяжести треугольника” изложением того же самого в стиле своей современной математики: “*существует теория, содержащая доказательство теоремы, утверждающей, что каждый ограниченный многоугольник в евклидовом или аффинном пространстве вещественной размерности два имеет больше одного центра тяжести*”.

Дело в том, что в современной французской математике ноль – положительное число, а термин “больше” означает то, что в других странах обозначается “больше или равно” (так как все более общие понятия у них “предпочтены” пренебрегаемым более специальным и конкретным). Мой наивный короткий текст считается неполным, содержащим “пробел”.

Среди сотен нелепых электронных писем, получаемых мною ежедневно, есть и такие, в которых коллеги (из разных стран) требуют от меня информации о том, как заполнить (подобные?) “пробелы” в статьях Колмогорова и Мозера.

Недооценка и этих двух замечательных математиков, и И. Г. Петровского и О. А. Олейник “современными” посредственностями совершенно естественна: не борись они против настоящей науки, им бы не пробыться! Картина Серова была в результате перестройки заменена норвежскими полотнами в парижском музее Орсе. Петровского постигнет участь Серова, если мы не будем бороться за обоих.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. Я. Виро. О топологии вещественных алгебраических многообразий // УМН. 1986. Т. 41. №3. С. 47–67.

¹⁰ Эти формы участвуют в описании топологических инвариантов Петровского и, следовательно, лагун для гиперболических систем общего положения (или с небольшим числом параметров).

- [2] В. М. Харламов. Топология действительных алгебраических многообразий // И. Г. Петровский. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия: Избр. труды. М.: Наука, 1986. С. 465–493.
- [3] Д. А. Гудков. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // УМН. 1974. Т. 29. № 4. С. 3–79.
- [4] В. И. Арнольд. О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм // Функц. анализ и его прил. 1971. Т. 5. № 3. С. 1–9.
- [5] В. А. Рохлин. Сравнения по модулю 16 в 16-й проблеме Гильберта // Функц. анализ и его прил. 1973. Т. 6. № 4. С. 658–664.
- [6] I. G. Petrovsky. Sur la topologie des courbes réelles et algébriques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1933. V. 197. P. 1270–1273.
- [7] I. G. Petrovsky. On the topology of real plane algebraic curves // Ann. of Math. (2). 1938. V. 39. P. 189–209. (Рус. пер.: О топологии действительных плоских алгебраических кривых // И. Г. Петровский. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия: Избр. труды. М.: Наука, 1986. С. 355–378.)
- [8] И. Г. Петровский, О. А. Олейник. О топологии действительных алгебраических поверхностей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1949. Т. 13. С. 389–402.
- [9] О. А. Олейник. Оценки чисел Бетти действительных алгебраических гиперповерхностей // Матем. сб. 1951. Т. 28. С. 635–640.
- [10] J. Milnor. On the Betti numbers of real varieties // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. P. 275–280.
- [11] R. Thom. Sur l'homologie des variétés algébriques réelles // Differential and Combinatorial Topology. A symposium in honour of Marston Morse. Princeton: Princeton Univ. Press, 1965. P. 255–265.
- [12] А. Г. Витушкин. К тринадцатой проблеме Гильберта // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 4. С. 701–704.
- [13] А. Г. Витушкин. Некоторые оценки из теории табулирования // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114. № 5. С. 923–926.
- [14] А. Н. Колмогоров. Оценки числа элементов ε -сетей в различных функциональных классах и их применение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных // УМН. 1955. Т. 10. № 1. С. 192–194.
- [15] A. G. Khovanskij. Fewnomials. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. (Transl. Math. Monogr. V. 88.) Рус. изд.: Малочлены. М.: Фазис, 1997.
- [16] В. И. Арнольд. Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского–Олейника и смешанные структуры Ходжа // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. № 1. С. 1–14.
- [17] Задачи Арнольда. М.: Фазис, 2000 (задача 1985–13, с. 61).
- [18] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky. Determinants, Resultants, and Multidimensional Determinants. Boston, MA: Birkhäuser, 1994.
- [19] В. И. Арнольд. О классах когомологий алгебраических функций, сохраняющихся при преобразованиях Чирнгаузена // Функц. анализ и его прил. 1970. Т. 4. № 1. С. 84–85.
- [20] В. Я. Лин. Суперпозиции алгебраических функций // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10. № 1. С. 37–45.
- [21] I. G. Petrovsky. On the diffusion of waves and the lakunas for hyperbolic equations // Матем. сб. 1945. Т. 17. № 3. С. 289–370. (Рус. пер.: О диффузии волн и лакунах для гиперболических уравнений // И. Г. Петровский. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия: Избр. труды. М.: Наука, 1986. С. 259–354.)
- [22] А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической задаче // Бюлл. МГУ, матем., мех. 1937. Т. 1. № 6. С. 1–26.
- [23] M. Atiyah, R. Bott, L. Garding. Lakuna for hyperbolic differential operators with constant coefficients. I // Acta Math. 1970. V. 124. P. 109–189.
- [24] M. Atiyah, R. Bott, L. Garding. Lakuna for hyperbolic differential operators with constant coefficients. II // Acta Math. 1973. V. 131. P. 145–206.

- [25] В. А. Васильев. Резкость и локальное условие Петровского для строго гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. №2. С. 242–283.
- [26] В. А. Васильев. Геометрия локальных лакун для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Матем. сб. 1992. Т. 183. №1. С. 114–129.
- [27] V. A. Vasil'ev. Local Petrovsky lakunas // Encyclopaedia of Mathematical Sciences / ed. V.I. Arnold. V. 39. Berlin: Springer-Verlag, 1993. P. 173–217.