Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Кольца эндоморфизмов строго неразложимых модулей, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 3, 207–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm55>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 11:26:27

КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ СТРОГО НЕРАЗЛОЖИМЫХ МОДУЛЕЙ

А. А. ТУГАНБАЕВ

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Модуль называется *строго неразложимым*, если все его фактор-модули неразложимы. Модуль называется *цепным*, если два его подмодуля сравнимы по включению. Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Любой цепной модуль является строго неразложимым равномерным модулем. Групповая алгебра прямого произведения двух циклических групп порядка 2 над полем из двух элементов является строго неразложимым равномерным нецепным модулем над собой. Основными результатами данной работы являются теоремы 1 и 2, где теорема 1 обобщает аналогичные результаты из [1] для цепных модулей.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – строго неразложимый равномерный модуль, S – множество всех эндоморфизмов модуля M , не являющихся мономорфизмами, T – множество всех эндоморфизмов модуля M , не являющихся эпиморфизмами. Тогда:

- (1) S и T такие собственные вполне первичные идеалы кольца $\text{End}(M)$, что любой собственный правый или левый идеал F кольца $\text{End}(M)$ лежит либо в S , либо в T ;
- (2) каждый максимальный правый или левый идеал Q кольца $\text{End}(M)$ совпадает либо с S , либо с T ;
- (3) либо идеалы S и T сравнимы по включению, либо S и T – не совпадающие максимальные правые идеалы и максимальные левые идеалы кольца $\text{End}(M)$;
- (4) $\text{End}(M)$ – локальное кольцо $\Leftrightarrow$ идеалы S и T сравнимы по включению и $J(\text{End}(M)) = S \cup T$;
- (5) $\text{End}(M)$ – не локальное кольцо $\Leftrightarrow \text{End}(M)/S$ и $\text{End}(M)/T$ – тела, $S + T = \text{End}(M)$, $J(\text{End}(M)) = S \cap T$;
- (6) $\text{End}(M)/J(\text{End}(M))$ – либо тело, либо прямое произведение двух тел и, в частности, $\text{End}(M)$ – полулокальное кольцо, у которого все максимальные односторонние идеалы являются идеалами;
- (7) M обладает свойствами сокращения и единственности корня.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M_A – цепной модуль над кольцом A . Тогда:

- (1) если все циклические подмодули модуля M имеют локальные кольца эндоморфизмов, то кольцо $\text{End}(M)$ локально;
- (2) если A инвариантно справа, то $\text{End}(M)$ локально;
- (3) если каждый циклический подмодуль модуля M – либо квазиинъективный, либо квазипроективный, либо артинов, либо нётеров модуль, то $\text{End}(M)$ локально.

Модуль M обладает свойством сокращения, если $N_1 \cong N_2$ для любых таких модулей N_1 и N_2 , что $M \oplus N_1 \cong M \oplus N_2$. Модуль M обладает свойством единственности корня, если для любого натурального n равенство $M^n \cong N^n$ влечет $M \cong N$. Модуль M называется квази-проективным, если для любого эпиморфизма $h: M \rightarrow \overline{M}$ и каждого гомоморфизма $\bar{f}: M \rightarrow \overline{M}$ существует такой гомоморфизм $f: M \rightarrow M$, что $\bar{f} = hf$. Для модуля M через $\text{sg}(M)$ и $\text{gs}(M)$ обозначаются идеалы кольца $\text{End}(M)$, состоящие соответственно из всех эндоморфизмов с существенными ядрами и всех эндоморфизмов с малыми образами.

ЛЕММА 1. Пусть M – строго неразложимый равномерный модуль, S – множество всех эндоморфизмов модуля M , не являющихся мономорфизмами, T – множество всех эндоморфизмов модуля M , не являющихся эпиморфизмами. Тогда:

- (1) S и T – собственные вполне первичные идеалы кольца $\text{End}(M)$, $S = \text{sg}(M)$ и $T = \text{gs}(M)$;
- (2) если существуют инъективный несюръективный эндоморфизм f модуля M и сюръективный неинъективный эндоморфизм g модуля M , то кольцо $\text{End}(M)$ не локально и $f + g$ – автоморфизм модуля M ;
- (3) если $\text{End}(M)$ не локально, то существуют инъективный несюръективный эндоморфизм f модуля M и сюръективный неинъективный эндоморфизм g модуля M такие, что $f + g \equiv 1_M$;

- (4) $\text{End}(M)$ не локально $\Leftrightarrow$ существуют инъективный несюръективный эндоморфизм f модуля M и сюръективный неинъективный эндоморфизм g модуля M ;
 (5) если либо все инъективные эндоморфизмы модуля M являются автоморфизмами, либо все сюръективные эндоморфизмы модуля M являются автоморфизмами, то $\text{End}(M)$ локально;
 (6) если M квазипроективен, то $\text{End}(M)$ локально;
 (7) если M артинов или нётеров, то $\text{End}(M)$ локально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) проверяется непосредственно.

(2) Допустим, что $f + g$ не автоморфизм. Тогда либо $f + g \in S$, либо $f + g \in T$. По (1) S и T – идеалы в $\text{End}(M)$. Так как $g \in S$ и $f \in T$, то либо $f = (f + g) - g \in S$, либо $g = (f + g) - f \in T$; получено противоречие. Тогда $f + g$ – автоморфизм. Так как сумма $f + g$ двух неавтоморфизмов модуля M является автоморфизмом, то $\text{End}(M)$ – не локальное кольцо.

(3) Так как $\text{End}(M)$ не локально, то существуют такие неавтоморфизмы $f, g \in \text{End}(M)$, что $f + g \equiv 1_M$. Без ограничения общности можно считать, что $f(M) \neq M$. Так как $f + g = 1_M$, то $M = f(M) + g(M)$ и $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = 0$. Поскольку $f(M) \neq M$ и M строго неразложим, то $g(M) = M$. Так как g – автоморфизм и $g(M) = M$, то $\text{Ker}(g) \neq 0$. Поскольку $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = 0$ и M равномерен, то $\text{Ker}(f) = 0$.

(4) следует из (2) и (3). (5) следует из (4). (6) следует из (5) и того, что каждый сюръективный эндоморфизм любого квазипроективного модуля расщепляется. (7) следует из (5) и того, что все инъективные (сюръективные) эндоморфизмы любого артинова (нётерова) модуля являются автоморфизмами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. (1) По лемме 1(1) S и T – вполне первичные идеалы в $\text{End}(M)$. Допустим, что существует собственный правый или левый идеал F кольца $\text{End}(M)$, не содержащийся ни в S , ни в T . Пусть $f \in F \setminus S$ и $g \in F \setminus T$. Тогда $\text{Ker}(f) = 0$ и $g(M) = M$. Так как $F \neq \text{End}(M)$, то f и g – не автоморфизмы. По лемме 1(2) $f + g$ – автоморфизм. Тогда F содержит обратимый элемент $f + g$ кольца $\text{End}(M)$; получено противоречие.

(2) следует из (1). (3)–(6) следует из (1) и (2). (7) следует из (6) и того, что любой модуль с полулокальным кольцом эндоморфизмов обладает свойствами сокращения и единственности корня [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. (1) Допустим противное. По лемме 1(3) существуют инъективный несюръективный эндоморфизм f модуля M и сюръективный неинъективный эндоморфизм g такие, что $f + g \equiv 1_M$. Существуют $m \in M \setminus f(M)$. Пусть $N \equiv mA$. Так как M – цепной модуль, то $f(M) \subset N \neq f(M)$. Поскольку $g \equiv 1 - f$ и $f(N) \subseteq N$, то $g(N) \subseteq N$. Тогда g и f индуцируют такие эндоморфизмы g_N и f_N модуля N , что $g_N + f_N = 1_N$. По предположению $\text{End}(N)$ локально. Так как N строго содержит $f(M)$, то f_N – не автоморфизм модуля N . Тогда g_N – автоморфизм модуля N . Поэтому $\text{Ker}(g_N) = 0$. Тогда $N \cap \text{Ker}(g) = 0$. Так как $N \neq 0$ и M – цепной модуль, то $\text{Ker}(g) = 0$; получено противоречие.

(2) Пусть N – циклический подмодуль модуля M . Так как N_A – циклический цепной модуль над инвариантным справа кольцом A , то кольцо $\text{End}(N)$ изоморфно цепному справа фактор-кольцу кольца A . Поэтому $\text{End}(N)$ локально и можно использовать (1).

(3) Так как кольцо эндоморфизмов каждого неразложимого квазиинъективного модуля локально, то по лемме 1(6), (7) все циклические подмодули модуля M имеют локальные кольца эндоморфизмов. (3) следует теперь из (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Facchini A. // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 348. №11. P. 4561–4575. [2] Facchini A., Hebrera D., Levy L., Vámos P. // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. №12. P. 3587–3592.