Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. У. Аубакиров, Е. Д. Нурсултанов, Пространства
стохастических процессов, интерполяционные теоремы,
УМН, 2006, том 61, выпуск 6, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5519>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:07:34

Пространства стохастических процессов, интерполяционные теоремы

Т. У. Аубакиров, Е. Д. Нурсултанов

В работе вводятся пространства стохастических процессов, которые являются аналогами сетевых пространств [1]. Доказываются интерполяционные свойства и теоремы вложения.

Будем предполагать заданным полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с фильтрацией, т.е. семейством $\mathbf{F} = \{F_n\}_{n \geq 1}$ σ -алгебр F_n таких, что $F_1 \subseteq \dots \subseteq F_n \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$.

Для заданного стохастического процесса $X = (X_n, F_n)_{n \geq 1}$ и $k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\overline{X}_k = \sup_{A \in F_k, \mathbf{P}(A) > 0} \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \left| \int_A X_k \mathbf{P}(d\omega) \right|.$$

Через $N_{pq}(\mathbf{F})$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, обозначим множество стохастических процессов $X = (X_n, F_n)_{n \geq 1}$, для которых при $q < \infty$

$$\|X\|_{N_{pq}(\mathbf{F})}^q := \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-\frac{q}{p}} \overline{X}_k^q < \infty$$

и при $q = \infty$

$$\|X\|_{N_{p\infty}(\mathbf{F})} := \sup_k k^{-\frac{1}{p}} \overline{X}_k < \infty.$$

$N_{pq}(\mathbf{F})$ будет квазинормированным пространством (при $q \geq 1$ нормированным) как факторпространство по ядру

$$J = \left\{ X : \int_A X_k \mathbf{P}(d\omega) = 0, A \in F_k, k \geq 1 \right\}.$$

Введенные пространства $N_{pq}(\mathbf{F})$ характеризуют усиленный закон больших чисел для стохастических процессов. Если $X \in N_{pq}(\mathbf{F})$, то последовательность $\{X_k(\omega)/k\}_{k=1}^{\infty}$ почти всюду стремится к нулю таким образом, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{p}} \frac{X_k(\omega)}{k} \right)^q \frac{1}{k} < \infty.$$

Пусть стохастический процесс $X = (X_n, F_n)_{n \geq 1}$ является субмартингалом. Тогда

- 1) при $0 < q_1 \leq q \leq \infty$ верно $\|X\|_{N_{pq}(\mathbf{F})} \leq c \|X\|_{N_{pq_1}(\mathbf{F})}$;
- 2) при $0 < p < p_1 < \infty$, $0 < q, q_1 \leq \infty$ верно $\|X\|_{N_{pq}(\mathbf{F})} \leq c \|X\|_{N_{p_1q_1}(\mathbf{F})}$.

Пусть $T = \{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ — преобразование стохастических процессов, определенных на $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ с фильтрацией $\mathbf{F} = \{F_n\}$, в стохастические процессы, определенные на $(\Lambda, \mathcal{R}, \nu)$ с фильтрацией $\Phi = \{\Phi_n\} : T(X) = \{T_n(X), \Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Будем говорить, что преобразование T квазилинейно, если найдется $c > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $\overline{T_n(X) - T_n(Y)} \leq c \overline{T_n(X - Y)}$.

Пусть $X = (X_n, F_n)_{n \geq 1}$ — стохастический процесс, $\tau(\omega)$ — марковский момент [2]. Через X^τ обозначим “остановленный” процесс $X^\tau = (X_{n \wedge \tau}, F_n)_{n \geq 1}$, где $X_{n \wedge \tau} = \sum_{m=1}^{n-1} X_m \chi_{\tau=m}(\omega) + X_n \chi_{\tau \geq n}(\omega)$, а через X^* — стохастический процесс $(\max_{1 \leq k \leq n} X_k, F_n)_{n \geq 1}$.

Данные преобразования стохастического процесса X являются примерами квазилинейных преобразований.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < r_0 < r_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq s \leq \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $X = (X_n, F_n)_{n \geq 1}$ — субмартингал и $T = \{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ — квазилинейное преобразование. Если для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнены условия

$$\|T(X^k)\|_{N_{r_1\infty}(\Phi)} \leq M_0 \|X^k\|_{N_{p_11}(\mathbf{F})}, \quad \|T(X - X^k)\|_{N_{r_0\infty}(\Phi)} \leq M_1 \|X - X^k\|_{N_{p_01}(\mathbf{F})},$$

то

$$\|T(X)\|_{N_{rs}(\Phi)} \leq c \max(M_0, M_1) \|X\|_{N_{ps}(\mathbf{F})}.$$

Данная теорема отличается от классических интерполяционных теорем [3]. Здесь интерполируются не пространства, а преобразование фиксированного стохастического процесса, т.е. условия и утверждение теоремы относятся к одному процессу.

ТЕОРЕМА 2. Пусть процесс $X = (X_n, F_n)_{n \geq 1}$ является субмартингалом, $\tau(\omega)$ – марковский момент. Тогда имеют место неравенства

$$\|X^\tau\|_{N_{pq}(\mathbf{F})} \leq c \|X\|_{N_{pq}(\mathbf{F})}, \quad \|X^*\|_{N_{pq}(\mathbf{F})} \leq c \|X\|_{N_{pq}(\mathbf{F})}.$$

Пусть $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, $1 < q \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Определим пространство мартингалов

$$N_p^{\alpha q}(\mathbf{F}) = \left\{ X = (X_n, F_n)_{n \geq 1} - \text{мартингал} : \sum_{k=0}^{\infty} (2^{\alpha k} \overline{\Delta X_k})^q < \infty \right\},$$

где

$$\overline{\Delta X_k} = \sup_{A \in \mathcal{F}, P(A) > 0} \frac{1}{[P(A)]^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A (X_{2k+1} - X_{2k}) P(d\omega) \right|, \quad X_{2^{-1}} \equiv 0.$$

$N_p^{\alpha q}(\mathbf{F})$ является пространством сходящихся мартингалов, где параметры α , q и p характеризуют скорость и метрику, в которой сходится данный процесс.

Пусть $\mathbf{A} = (A_0(\mathbf{F}), A_1(\mathbf{F}))$ – пара квазинормированных собственных подпространств линейного хаусдорфова пространства $\mathcal{N}(\mathbf{F})$ стохастических процессов, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с фильтрацией $\mathbf{F} = \{F_n\}_{n \geq 1}$.

Для $0 < \theta < 1$ при $0 < q < \infty$ обозначим

$$(A_0, A_1)_{\theta, q} = \left\{ X \in \mathcal{N}(\mathbf{F}) : \|X\|_{(A_0, A_1)_{\theta, q}}^q = \int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, X))^q \frac{dt}{t} < \infty \right\},$$

а при $q = \infty$

$$(A_0, A_1)_{\theta, \infty} = \left\{ X \in \mathcal{N}(\mathbf{F}) : \|X\|_{(A_0, A_1)_{\theta, \infty}} = \sup_{0 < t < \infty} t^{-\theta} K(t, X) < \infty \right\},$$

где $K(t, X; A_0, A_1) = \inf_{X=Y+Z} (\|Y\|_{A_0} + t\|Z\|_{A_1})$ – функционал Петре [3].

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q, q_0, q_1 \leq \infty$, $\alpha_0 < \alpha_1$, $0 < \theta < 1$, $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$. Тогда $(N_p^{\alpha_0 q_0}(\mathbf{F}), N_p^{\alpha_1 q_1}(\mathbf{F}))_{\theta, q} = N_p^{\alpha q}(\mathbf{F})$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть фильтрация $\mathbf{F} = \{F_n\}_{n \geq 1}$ такова, что для каждого $k = 1, 2, \dots$ и любого $A \in F_k$ выполнено условие $P(A) \geq \frac{c}{k}$, где постоянная $c > 0$ не зависит от k . Если $1 < r < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\alpha = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$, то имеет место вложение $N_r^{\alpha q}(\mathbf{F}) \hookrightarrow N_{pq}(\mathbf{F})$.

Список литературы

- [1] Е. Д. Нурсултанов, *Матем. сб.*, **189**:3 (1998), 83–102. [2] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, М., 2005. [3] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.

Т. У. Аубакиров (Т. У. Aubakirov)
Казахстанский филиал
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Представлено А. Г. Костюченко
Принято редколлегией
08.09.2006

Е. Д. Нурсултанов (Е. D. Nursultanov)
Казахстанский филиал
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: er-nurs@yandex.ru