Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. О. Мантуров, Инвариантный полином двух переменных для виртуальных зацеплений, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 5, 141–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm555>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:48:00

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ИНВАРИАНТНЫЙ ПОЛИНОМ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ
ДЛЯ ВИРТУАЛЬНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

В. О. МАНТУРОВ

В последние годы широкое развитие получило обобщение теории узлов — теория виртуальных узлов, предложенная в [1]. В [1], [2] предложены обобщения известных инвариантов классических зацеплений на виртуальный случай. В [3] приведен ряд новых инвариантов, в частности, VA -полином одной переменной. В настоящей заметке мы приводим более сильный инвариант виртуальных зацеплений, представляющий собой полином двух переменных. Основные определения, встречающиеся в статье, можно найти в [4].

Будем задавать виртуальные зацепления их плоскими диаграммами — графами кратности 4 с дополнительной структурой классического (проход-переход) либо виртуального перекрестка в каждой вершине. Здесь мы имеем дело лишь с ориентированными зацеплениями. Назовем *дугами* диаграммы связные компоненты множества, полученного из нее выкалыванием виртуальных перекрестков. Скажем, что две дуги a и a' принадлежат одной *длинной дуге*, если существует такая последовательность дуг $a = a_0, \dots, a_n = a'$ и виртуальных перекрестков $C_1, \dots, C_n$, что для $i = 1, \dots, n$ дуги a_i, a_{i-1} примыкают к C_i с противоположных сторон.

По определению [1] две диаграммы задают одно и то же виртуальное зацепление, когда одна из них переводится в другую посредством виртуальных движений Райдемайстера. Назовем диаграмму *правильной*, если все ее длинные дуги не являются циклическими. Несложно показать, что эквивалентные правильные диаграммы перестраиваются друг в друга виртуальными движениями Райдемайстера в классе правильных диаграмм. Для любой правильной диаграммы число длинных дуг равно числу классических перекрестков. В дальнейшем будем иметь дело лишь с правильными диаграммами.

Пусть $\bar{L}$ — правильная диаграмма виртуального зацепления L с n классическими перекрестками. Построим $(n \times n)$ -матрицу $M(\bar{L})$ с элементами из $\mathbb{Z}[t, t^{-1}, s, s^{-1}]$ следующим образом. Перенумеруем классические перекрестки диаграммы L числами от 1 до n и сопоставим каждому перекрестку длинную дугу, исходящую из него. Каждая длинная дуга начинается с (короткой) дуги. Припишем этой дуге метку 1. Всем остальным дугам данной длинной дуги припишем степени s^k , $k \in \mathbb{Z}$, следующим образом. При прохождении через виртуальный перекресток умножим метку на s (при прохождении с левой стороны пересекающей дуги на правую) или на s^{-1} (в противном случае). Так как диаграмма правильная, расстановка меток задана корректно. Рассмотрим классический перекресток V_i с номером i . К нему примыкают три дуги p, q, r , соответствующие длинным дугам с номерами i, j, k , причем номер j имеет длинная дуга, проходящая сквозь перекресток V_i . Обозначим степень переменной s у метки, соответствующей дуге q , через a_{ij} , а степень у метки, соответствующей r , — через a_{ik} , см. рис. 1.

Рис. 1. Дуги в классических перекрестках

Определим i -ю строку матрицы $M(\overline{L})$ как сумму трех строк y_1, y_2, y_3 длины n , каждая из которых имеет ровно один ненулевой элемент, причем i -й элемент строки y_1 равен 1. Если рассматриваемый перекресток положителен, положим $y_{2k} = -s^{a_{ik}}t$, $y_{3j} = (t-1)s^{a_{ij}}$, в противном случае положим $y_{2k} = -s^{a_{ik}}t^{-1}$, $y_{3j} = (t^{-1}-1)s^{a_{ij}}$. Положим $\zeta(\overline{L}) = t^{w(\overline{L})} \det M(\overline{L})$. Очевидно, что $\zeta(\overline{L})$ не зависит от перенумерации строк матрицы.

ТЕОРЕМА 1. Для любых двух диаграмм $\overline{L}$ и $\overline{L}'$ одного и того же виртуального зацепления L имеем $\zeta(\overline{L}) = t^l \zeta(\overline{L}')$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при чисто виртуальных движениях матрица $M(\overline{L})$ и число $w(\overline{L})$ не меняются. Следовательно, полином ζ инвариантен относительно таких движений. При полувиртуальном третьем движении Райдемайстера с матрицей происходит умножение на $s^{\pm 1}$ одной ее строки и на $s^{\mp 1}$ — соответствующего столбца, что также не меняет определителя. При классических движениях Ω_2, Ω_3 определитель не меняется, а в случае Ω_1 — умножается на некоторую степень переменной t .

Пусть m, M — младшая и старшая степени переменной t в мономах, входящих в $\zeta(L)$. Положим $\xi(L) = t^{-(\frac{m+M}{2})} \zeta(L)$. По построению ξ является инвариантом виртуальных зацеплений. Верны следующие свойства полинома ξ .

ТЕОРЕМА 2. Для виртуального зацепления L , изотопного классическому, $\xi(L) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для диаграммы $\overline{L}$ зацепления L без виртуальных перекрестков дуги совпадают с длинными дугами, при этом на каждой из них стоит метка $s^0 = 1$. Следовательно, матрица M имеет собственный вектор $(\underbrace{1, \dots, 1}_n)$ с нулевым собственным значением. Поэтому

$\det M(\overline{L}) = 0$, что и требовалось доказать.

Из непосредственной проверки следует

ТЕОРЕМА 3. Для любой тройки Конвея L_+, L_-, L_0 найдутся $p, q \in \mathbb{Z}$ такие, что $t^p \xi(L_+) - t^q \xi(L_-) = (1-t)\xi(L_0)$.

Полином ξ позволяет различать виртуальные зацепления, не всегда различаемые полиномом Джонса V [1] (например, тривиальное двухкомпонентное зацепление и замыкание виртуальной косы из двух нитей $\sigma_1 \zeta_1 \sigma_1^{-1} \zeta_1$) и полиномом VA (несвязная сумма “виртуального трилистника” [4; с. 257, рис. 11]) с самим собой и несвязная сумма его же с тривиальным узлом).

Выражаю глубокую благодарность В. А. Васильеву за поддержку и внимание к работе. Я также благодарен И. А. Дынникову за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. H. Kauffman // European J. Combin. 1999. V. 20. № 7. P. 663–690. [2] M. Gousarov, M. Polyak, O. Viro // Topology. 2000. V. 39. P. 1045–1068. [3] В. О. Мантуров // Докл. РАН. 2002. Т. 384. № 1. С. 11–13. [4] В. О. Мантуров. Лекции по теории узлов и их инвариантов. М.: УРСС, 2001.