Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Абсава, Э. А. Надарая, Л. Э. Надарая, Предельное распределение квадратического уклонения двух непараметрических оценок проекционного типа функции регрессии, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 5, 143–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm556>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 17:16:55

**ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КВАДРАТИЧЕСКОГО
УКЛОНЕНИЯ ДВУХ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНОК
ПРОЕКЦИОННОГО ТИПА ФУНКЦИИ РЕГРЕССИИ**

Р. М. АБСАВА, Э. А. НАДАРАЯ, Л. Э. НАДАРАЯ

Пусть имеется два множества наблюдений $Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)}, \dots, Y_{2n}^{(i)}, i = 1, 2$, представимые в виде

$$Y_j^{(i)} = \mu_i(x_j) + \varepsilon_{ij}, \quad j = \overline{1, 2n}, \quad i = 1, 2,$$

где $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, — неизвестные функции регрессии; $x_j = -\pi + \frac{2\pi j}{2n+1}$, $j = \overline{1, 2n}$, совокупности ошибок ε_{1j} и ε_{2j} , $j = \overline{1, 2n}$, не зависят друг от друга; внутри этих совокупностей ошибки независимы и одинаково распределены, имеют нулевые средние и дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 соответственно, причем $E\varepsilon_{11}^4 < \infty$ и $E\varepsilon_{21}^4 < \infty$.

Предположим, что $\mu_i(x)$, $i = 1, 2$, представима в виде сходящегося в $L_2(-\pi, \pi)$ ряда по ортонормированной тригонометрической системе

$$\{(2\pi)^{-1/2}, \pi^{-1/2} \cos ix, \pi^{-1/2} \sin ix\}.$$

Рассмотрим оценку [1] функции регрессии $\mu_i(x)$, построенную проекционным методом Н. Н. Ченцова [2].

На практике часто бывает необходимо проверить одинаковы ли функции регрессии, т.е. требуется проверить гипотезу $H_0: \mu_1(x) = \mu_2(x)$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$ против альтернативы $H_1: \mu_1(x) \neq \mu_2(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Рассмотрим в качестве расстояния между $\mu_{nN}^{(1)}(x)$ и $\mu_{nN}^{(2)}(x)$ статистику

$$V_{nN} = \frac{2n+1}{2\pi(2N+1)} \int_{-\pi}^{\pi} [\mu_{nN}^{(1)}(x) - \mu_{nN}^{(2)}(x)]^2 dx,$$

с помощью которой можно построить критерий для проверки нулевой гипотезы H_0 . С этой целью в данной работе получено предельное распределение функционала V_{nN} , а также изучено локальное поведение мощности построенного критерия для последовательности близких альтернатив к гипотезе H_0 .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\frac{N^2 \ln N}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда в случае справедливости гипотезы H_0

$$\sqrt{N + \frac{1}{2}} (V_{nN} - \sigma^2) \sigma^{-2} \xrightarrow{d} \xi, \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2, \quad \text{где } \xi \sim N(0, 1).$$

Пусть σ^2 известно. Критическая область устанавливается приближенно неравенством

$$V_{nN} \geq d_{nN}(\alpha) = \sigma^2 (1 + \sqrt{2} (2N+1)^{-1/2} \lambda_\alpha),$$

где λ_α — квантиль уровня α стандартного нормального распределения.

Пусть теперь σ^2 неизвестно. Обозначим $Z_j = Y_j^{(1)} - Y_j^{(2)}$ и в качестве оценки σ^2 введем статистику

$$S_n^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{j=2}^{2n} (Z_j - Z_{j-1})^2.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\frac{N^2 \ln N}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\sqrt{N + \frac{1}{2}} (V_{nN} - S_n^2) S_n^{-2} \xrightarrow{d} \xi.$$

Из этой теоремы следует, что в случае неизвестного σ^2 критическая область устанавливается неравенством $V_{nN} \geq \tilde{d}_{nN}(\alpha)$, где $\tilde{d}_{nN}(\alpha)$ получено из $d_{nN}(\alpha)$ заменой σ^2 на S_n^2 .

Рассмотрим теперь последовательность альтернатив $\{H_{1n}\}$, сближающихся при $n \rightarrow \infty$ с основной гипотезой H_0 :

$$H_{1n} : V_n(x) = \mu_1(x) - \mu_2(x) = V(x)\gamma_n, \quad \gamma \rightarrow 0.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $V(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, ограничена и имеет ограниченную производную. Если $N = 2n^\delta$, $\gamma_n = n^{-1/2+\delta/4}$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, то статистика $(2N+1)^{1/2}(V_{nN} - \sigma^2)$ при альтернативе H_{1n} распределена в пределе нормально $\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V^2(x) dx, \sqrt{2} \sigma^2\right)$.

Итак, локальное поведение мощности $P_{H_{1n}}(V_{nN} \geq d_{nN}(\alpha))$ таково:

$$P_{H_n}(V_{nN} \geq d_{nN}(\alpha)) \rightarrow 1 - \Phi\left(\lambda_\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}\sigma^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V^2(x) dx\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. А. Nadaraya // Proceedings of the Georgia Academy of Sciences. Mathematics 1993. V. 1. №2. P. 221–237. [2] Н. Н. Ченцов // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. № 1. С. 45–48.

Сухумский филиал ТГУ им. И. Дхавахишвили,
г. Тбилиси

Принято редколлегией
21.08.2002