Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Я. Амбург, Пример регулярного штробелева дифференциала, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 5, 145–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm557>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:03:57

ПРИМЕР РЕГУЛЯРНОГО ШТРЕБЕЛЕВА ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Н. Я. АМБУРГ

Известные доказательства существования штребелевых дифференциалов на римановых поверхностях [1], [2] неконструктивны (в них используются аргументы типа нормальных семейств) и не дают конкретных примеров регулярных дифференциалов. Конкретные примеры *мероморфных* штребелевых дифференциалов строятся по функциям Белого [3]. Цель настоящей работы – привести конкретный пример *регулярного* штребелева дифференциала.

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Пусть X – компактная риманова поверхность. Обозначим K_X канонический класс. И пусть $\eta \in H^0(X; 2K_X + P_1 + \dots + P_n)$ – мероморфный *квадратичный дифференциал* на X с полюсами первого порядка в $P_1, \dots, P_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кривая $\gamma: (t_1, t_2) \rightarrow X$ – это часть слоя горизонтального слоения, определенного η , если для некоторой достаточно близкой к кривой фиксированной точки x_0 и для любого $t \in (t_1, t_2)$ выполнено

$$\operatorname{Im} \int_{x_0}^{\gamma(t)} \sqrt{\eta} = \operatorname{const}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Из нуля η порядка k выходят $k+2$ слоя горизонтального слоения, а из полюса первого порядка – 1 слой; они называются *критическими кривыми η* или *сепаратрисами*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квадратичный дифференциал η называется *штребелевым дифференциалом*, если объединение его сепаратрис, нулей и полюсов компактно.

Это значит, что слой горизонтального слоения η , выходящий из нуля или полюса, заканчивается в нуле или в полюсе, возможно в том же самом.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На кривой $y^{12} = x^6(x-1)$ рода $g = 3$ действует циклическая группа $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ с образующей $(x, y) \mapsto (x, e^{(\frac{2\pi i}{12})}y)$. Выберем в этой группе подгруппу порядка три с образующей $\sigma: (x, y) \mapsto (x, e^{(\frac{2\pi i}{3})}y)$. Тогда $f: (x, y) \mapsto (x, y^3)$ – трехлистное накрытие, разветвленное в двух точках $(x = 1, y = 0)$, $(x = \infty, y = \infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Кривая $y^4 = x^6(x-1)$ бирационально изоморфна кривой $v^2 = u(u^2 + 1)$.

$$\psi: (x, y) \mapsto (u, v) = \left(\frac{y^2}{x^3}, \frac{y}{x} \right), \quad \psi^{-1}: (u, v) \mapsto (x, y) = (u^2 + 1, (u^2 + 1)v).$$

Точки ветвления f перешли в точки $(u = 0, v = 0)$ и $(u = \infty, v = \infty)$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ. $\eta = -\frac{\sqrt{2}u+v}{u} \left(\frac{du}{v} \right)^2$ – квадратичный дифференциал на кривой, заданной уравнением $v^2 = u(u^2 + 1)$.

ТЕОРЕМА. На кривой $y^{12} = x^6(x-1)$ рода $g = 3$ квадратичный дифференциал

$$f^*(\psi^*(\eta)) = - \left(\sqrt{2} \frac{y^4}{x^6} + \frac{y}{x^4} \right) (6x dy - 3y dx)^2$$

является голоморфным штребелевым дифференциалом.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На кривых $v^2 = u(u^2 + 1)$ и $y^4 = x^6(x - 1)$ рода $g = 1$

$$\eta = -\frac{\sqrt{2}u+v}{u}\left(\frac{du}{v}\right)^2 \quad \text{и} \quad \psi^*(\eta) = -\left(\sqrt{2}\frac{y}{x^3} + \frac{1}{x}\right)\frac{(2x dy - 3y dx)^2}{x^3 y}$$

являются штребелевыми дифференциалами с двумя полюсами первого порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Если $\xi = z^3$, то $\frac{1}{\xi}(d\xi)^2 = 9z(dz)^2$. Точки ветвления $\psi \circ f$ приходятся ровно на простые полюсы η , поэтому $f^*(\psi^*(\eta))$ – голоморфный квадратичный дифференциал. Если η штребелев, то и $f^*(\psi^*(\eta))$ штребелев. То, что η штребелев, мы докажем явно. Зная, где находятся нули и полюсы дифференциала, мы укажем соединяющие их сепаратрисы. Нули и полюсы квадратичного дифференциала

$$\eta = -\frac{\sqrt{2}u+v}{u}\left(\frac{du}{v}\right)^2$$

на кривой $v^2 = u(u^2 + 1)$ расположены следующим образом. Точки $(u = 0, v = 0)$ и $(u = \infty, v = \infty)$ – полюсы первого порядка, из них выходит по одной сепаратрисе. Точка $(u = 1, v = -\sqrt{2})$ – нуль второго порядка, из него выходят четыре сепаратрисы.

Кривая

$$\gamma_0: t \mapsto (u = t, v = -\sqrt{t(t^2 + 1)}), \quad t \in [0, 1],$$

является сепаратрисой, соединяющей полюс $(u = 0, v = 0)$ и нуль $(u = 1, v = -\sqrt{2})$. Действительно,

$$\operatorname{Im} \int_{\gamma_0(0)}^{\gamma_0(\tau)} \sqrt{\eta} = -\operatorname{Im} \int_0^\tau \sqrt{\frac{\sqrt{t(t^2 + 1)} - t\sqrt{2}}{t^2(t^2 + 1)}} dt = 0.$$

Точно так же кривая

$$\gamma_1: t \mapsto (u = t, v = -\sqrt{t(t^2 + 1)}), \quad t \in [1, \infty],$$

– это сепаратриса, соединяющая нуль $(u = 1, v = -\sqrt{2})$ и полюс $(u = \infty, v = \infty)$.

Осталось указать еще одну сепаратрису. Она состоит из двух кусочков:

$$\begin{aligned} \gamma_2: \varphi \mapsto (u = e^{i\varphi}, v = -e^{i\varphi/2} \sqrt{(e^{i2\varphi} + 1)}), \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \gamma_3: \varphi \mapsto (u = e^{i\varphi}, v = e^{i\varphi/2} \sqrt{(e^{i2\varphi} + 1)}), \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Это следует из равенства

$$\operatorname{Im} \int_{\gamma_2(0)}^{\gamma_2(\alpha)} \sqrt{\eta} = -\operatorname{Im} \int_0^\alpha \sqrt{\frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{\cos \varphi})}{2 \cos \varphi}} d\varphi = 0;$$

то же самое на кусочке γ_3 . Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. Douady, J. Hubbard // Invent. Math. 1975. V. 30. P. 175–179. [2] K. Strebel // Lecture Notes in Math. 1974. V. 419. P. 352–369. [3] M. Mulase, M. Penkava // Asian J. Math. 1998. V. 2. № 4. P. 875–919.

Принято редколлегией
21.08.2002