Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Бесов, В. С. Владимиров, В. В. Козлов, С. М. Никольский, Ю. С. Осипов, С. И. Похожаев, В. А. Садовничий, Владимир Александрович Кондратьев (к 70-летию со дня рождения), *УМН*, 2006, том 61, выпуск 6, 195–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5579>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:42:30

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Владимир Александрович Кондратьев

(к семидесятилетию со дня рождения)

2 июля 2005 г. исполнилось 70 лет заслуженному профессору Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, доктору физико-математических наук Владимиру Александровичу Кондратьеву.

В. А. Кондратьев родился в городе Самара (Куйбышев) 2 июля 1935 г. Его отец был профессором механики Куйбышевского индустриального института, мать — учителем математики в средней школе. В 1952 г. В. А. Кондратьев закончил школу № 6 города Куйбышева с золотой медалью и поступил на механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова.

В. А. Кондратьев закончил механико-математический факультет МГУ в 1957 г., в 1960 г. — аспирантуру этого факультета. Его научным руководителем был С. А. Гальперн. Большое влияние на его научную деятельность оказал И. Г. Петровский. В 1959 г. В. А. Кондратьев защитил кандидатскую диссертацию «О нулях решений линейных дифференциальных уравнений порядка выше второго», а в 1965 г. — докторскую диссертацию «Краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений с особенностями на границе». С 1961 г. работал доцентом кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ, с 1970 г. — профессор этой кафедры.

Основные направления исследований В. А. Кондратьева:

- исследование колеблемости и неколеблемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений;
- эллиптические уравнения в областях с угловыми и коническими точками;
- качественные и асимптотические свойства решений линейных и нелинейных эллиптических и параболических уравнений и систем;
- спектральные задачи для дифференциальных операторов, оценки минимального собственного значения дифференциальных операторов;
- асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами и качественные свойства слабых решений эллиптических задач;
- исследование математических проблем теории упругости.

Приведем основные результаты В. А. Кондратьева по каждому из этих направлений.

Исследование колеблемости и неколеблемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Первые научные результаты В. А. Кондратьева, полученные им еще в студенческие годы, были посвящены исследованию колеблемости и неколеблемости решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Им установлен критерий неколеблемости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. На основании этого критерия был получен ряд достаточных условий неколеблемости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. Работы В. А. Кондратьева, составившие основу его кандидатской диссертации, включают в себя доказательство теорем о разделении нулей типа теоремы Штурма, а также критерий колеблемости и неколеблемости решений для линейных уравнений третьего и четвертого порядка. В дальнейшем эти результаты были им обобщены на случай линейного уравнения произвольного порядка, а также получена оценка роста числа нулей колеблющегося решения при бесконечном возрастании аргумента решения, зависящего от порядка уравнения. Эти результаты явились одним из первых в мире исследований в области качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка.

Эллиптические уравнения в областях с угловыми и коническими точками. В. А. Кондратьевым положено начало систематическому изучению эллиптических и параболических задач в областях с негладкой границей. Эти результаты составили основу его докторской диссертации. Первый основополагающий результат в этом направлении им получен для параболических уравнений в нецилиндрической области с характеристическими точками на границе. В этих работах В. А. Кондратьевым установлен и критерий разрешимости краевых задач в весовых пространствах Соболева, и асимптотика решений вблизи характеристической точки. Другое значительное достижение в этом направлении – теория эллиптических уравнений в областях с коническими точками на границе. Разработанный в этих работах метод является универсальным. Он оказался применимым к широкому классу уравнений в областях с изолированными особенностями на границе. В. А. Кондратьев написал ряд ставших уже классическими работ, в которых введено и изучено понятие емкости для эллиптических уравнений высокого порядка. Содержащиеся в них результаты послужили отправной точкой многих современных исследований и определили новое направление не только в теории дифференциальных уравнений. Благодаря этим работам емкость нашла применение в теоремах вложения Соболева, а для эллиптических уравнений высокого порядка – в вопросах однозначной разрешимости первой краевой задачи, гладкости решений вблизи границы, устранения особенностей решений.

В. А. Кондратьев исследовал (совместно с О. А. Олейник и И. Копачеком) регулярность решений эллиптических уравнений в окрестности граничной точки, а также установил наилучшие значения показателей Гёльдера для эллиптических уравнений второго порядка.

В. А. Кондратьевым (совместно с Ю. А. Алхутковым) изучалась разрешимость задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в выпуклой области. Была доказана теорема существования решений первой краевой задачи в классе $W_p^1(\Omega)$ при слабых предположениях относительно гладкости коэффициентов и правой части уравнения.

В. А. Кондратьев исследовал (совместно с В. Г. Мазьей и В. А. Козловым) вопрос об отсутствии сильных нулей решений эллиптических уравнений. Доказано, что у бигармонического уравнения нуль решения задачи Дирихле имеет конечный порядок.

Качественные и асимптотические свойства решений нелинейных эллиптических и параболических уравнений и систем. В. А. Кондратьевым (совместно с Ю. В. Егоровым) исследовалась задача с косой производной. Это задача

для эллиптического уравнения второго порядка в ограниченной области в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей и краевым условием, содержащим производную вдоль векторного поля, которое может касаться граничной поверхности в точках одного или нескольких гладких подмногообразий размерности $n - 2$. Все такие подмногообразия делятся на три класса в зависимости от структуры поля в их окрестности. Было показано, что для того, чтобы задача была фредгольмовой, необходимо задать дополнительные условия, например, значения решений на этом подмногообразии, если оно относится к первому классу, или рассматривать разрывные решения, если оно относится ко второму классу.

В. А. Кондратьевым (совместно с С. Д. Эйдельманом) исследовались качественные свойства положительных решений систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными произвольного порядка. В частности, показано, что положительные в шаре решения эллиптических уравнений с гладкими коэффициентами принадлежат пространствам L_p с любым p . Полученные ими результаты об L_1 -следах и разработанная теория эллиптических граничных задач в пространствах обобщенных функций любого конечного порядка позволили получить обобщенное интегральное представление положительных решений эллиптических систем.

Теми же авторами получены точные условия на граничную гиперповерхность ограниченной области, гарантирующие нётеровость эллиптической граничной задачи в пространствах Соболева. Также были установлены различные варианты теорем единственности решения задачи Коши для эволюционных квазиэллиптических систем, обобщающие классические теоремы единственности решения задачи Коши–Теклинда и Уиддера.

В. А. Кондратьевым (совместно с Е. М. Ландисом) был получен ряд важных результатов для дивергентных и недивергентных эллиптических уравнений второго порядка с негладкими коэффициентами. В их ставшей уже классической работе была получена теорема об устранимости изолированной сингулярности решений. Кроме того, ими были найдены достаточные условия тривиальности всякого целого неотрицательного решения. Ранее подобные результаты были известны лишь в случае, когда левая часть уравнения представляет собой оператор Лапласа.

В. А. Кондратьевым получены обобщения известных результатов из теории линейных уравнений, касающихся асимптотического поведения решений в окрестности угловой точки, на случай эллиптических уравнений с нелинейностью типа Эмдена–Фаулера. В частности, было установлено, что в нелинейном случае оценки модуля решения имеют место и без каких бы то ни было априорных условий (например, ограниченности интеграла Дирихле).

В. А. Кондратьевым (совместно с В. А. Никишкиным) рассматривались положительные решения первой краевой задачи для квазилинейного эллиптического уравнения типа Эмдена–Фаулера с изолированной особенностью в нуле в ограниченной области в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей (начало координат принадлежит области). В работе доказано существование и единственность решений различных типов. Кроме того, получена асимптотика сингулярных решений уравнения типа Эмдена–Фаулера. Для решения задачи, удовлетворяющего некоторому условию роста в окрестности нуля, была найдена асимптотика и доказана его единственность, получены равномерные оценки решений в окрестности нуля, точные по порядку роста.

Необходимо также упомянуть совместную работу В. А. Кондратьева с Л. Вероном, посвященную асимптотическим свойствам решений нелинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях.

В. А. Кондратьевым рассматривалось решение нелинейного эллиптического уравнения типа Эмдена–Фаулера в цилиндрической области, удовлетворяющее краевому условию Неймана. Доказано, что всякое решение этой задачи отличается от некоторого решения квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения, свя-

занного с этой задачей, на слагаемое, которое экспоненциально стремится к нулю при $x_n \rightarrow +\infty$.

В. А. Кондратьевым найдена точная асимптотика стремящихся к нулю решений линейного эллиптического уравнения с нелинейными краевыми условиями в полубесконечном цилиндре.

Исследовались также асимптотические свойства осциллирующих решений задачи. Метод исследования для получения этих результатов основан на изучении спектральных свойств некоторой линейной спектральной задачи. Кроме этого, установлено существование неограниченных решений задачи в случае, когда порождающий ее дифференциальный оператор является оператором Лапласа.

В. А. Кондратьевым (совместно с Ю. В. Егоровым и О. А. Олейник) изучена асимптотика решений слабонелинейных эллиптических и параболических систем уравнений второго порядка. В частности, изучено поведение при $t \rightarrow +\infty$ решения нелинейного параболического уравнения второго порядка, удовлетворяющего краевым условиям Неймана в ограниченной по пространственным переменным области с границей, удовлетворяющей условию Липшица. Доказательства основаны на теореме об асимптотической эквивалентности двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом основное внимание уделено существованию и асимптотике положительных решений, хотя изучаются и любые, возможно знакопеременные, решения. Приведены примеры, показывающие, что используемые в доказательстве методы позволяют рассмотреть уравнения и системы порядка выше второго.

В. А. Кондратьевым рассматривалась задача Дирихле и задача Неймана для нелинейного уравнения теплопроводности в ограниченной по пространственным переменным области. Установлены некоторые достаточные условия на функцию, задающую нелинейность, при которых любое решение задачи при неотрицательной начальной функции имеет “взрыв” (без ограничений малости на начальную функцию). Эти условия состоят в требовании, чтобы функция, задающая нелинейность, экспоненциально росла при $t \rightarrow +\infty$, и являются точными. Проблеме отсутствия целых нетривиальных решений (“blow-up”) уравнений эллиптического и параболического типа посвящены совместные исследования В. А. Кондратьева с В. А. Галактионовым, Ю. В. Егоровым и С. И. Похожаевым. Ими были найдены условия “blow-up” для широкого класса задач, в том числе для нелинейных уравнений типа Эмдена–Фаулера высокого порядка.

В. А. Кондратьевым (совместно с А. А. Коньковым) исследовалась проблема “blow-up” для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений второго порядка с нелинейностью общего вида.

Спектральные задачи для дифференциальных операторов, оценки минимального собственного значения дифференциальных операторов. Одним из вопросов, изучавшихся В. А. Кондратьевым, является задача о полноте систем собственных и присоединенных функций эллиптических операторов. Наиболее общий результат в этом направлении ранее был получен С. Агмоном, который рассматривал эллиптические операторы произвольного порядка с граничными условиями типа Лопатинского и доказал полноту собственных и присоединенных функций в пространствах $L_p(\Omega)$ для любого $p > 1$.

В. А. Кондратьевым были найдены условия на коэффициенты главной части оператора, обеспечивающие полноту собственных и присоединенных функций задачи Дирихле для эллиптического оператора второго порядка дивергентного вида в пространствах $\dot{W}_p^1(\Omega)$, $p \geq 1$, и весовых пространствах Соболева. Некоторые из полученных здесь В. А. Кондратьевым результатов являются новыми даже для оператора Лапласа с нулевыми данными Дирихле на границе. Например, доказывается, что линейная оболочка системы собственных и присоединенных функций плотна в любом $\dot{W}_p^1(\Omega)$, $p \geq 1$, при условии, что Ω – выпуклая область. Получены также результаты, относящиеся к задаче Неймана.

В дальнейшем В. А. Кондратьевым (совместно с Ю. В. Егоровым и Б. Шульце) была установлена полнота систем собственных и присоединенных функций краевых задач с граничными условиями типа Лопатинского для эллиптических операторов порядка $2m$ в пространстве $W_2^{2m}(\Omega)$ в ограниченной области, граница которой является гладкой всюду за исключением окрестностей конечного числа точек, где она является конической поверхностью.

В. А. Кондратьевым (совместно с Ю. В. Егоровым) написан цикл работ (включая монографию) по проблеме оценки минимальных собственных значений задачи Штурма–Лиувилля. Авторами исследовалась возникающая в теории упругости в процессе поиска наиболее прочных конструкций из данного материала задача оптимизации собственных значений проблемы Штурма–Лиувилля за счет выбора потенциала из некоторого фиксированного класса функций.

В качестве примера можно привести знаменитую задачу Лагранжа: найти наиболее прочную колонну, которая является телом вращения плоской кривой вокруг некоторой прямой, расположенной в ее плоскости.

Решение этой задачи, предложенное самим Лагранжем, было некорректным. Первое успешное исследование этой задачи было проведено в 1961 г. Келлером и Таджбахшем, тем не менее, было установлено, что в доказательстве Келлера–Таджбахша содержится ошибка. В. А. Кондратьевым и Ю. В. Егоровым было предложено альтернативное доказательство теоремы Келлера–Таджбахша.

В частности, в работе В. А. Кондратьева и Ю. В. Егорова рассматривалась зависимость первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля и ее обобщений от потенциала и параметра интегрального условия. Получены оценки минимального собственного значения этой задачи при тех значениях параметра, при которых это возможно.

В. А. Кондратьевым (совместно с Ю. В. Егоровым) были получены оценки числа точек отрицательного спектра оператора Шрёдингера.

В. А. Кондратьевым (совместно с М. А. Шубиным) рассматривались обобщения критерия дискретности спектра А. М. Молчанова на случай оператора Шрёдингера на римановом многообразии ограниченной геометрии.

Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами и качественные свойства слабых решений эллиптических задач. В. А. Кондратьевым (совместно с Л. А. Багировым) исследовались решения дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве первого и произвольного порядков, которые возникают при исследовании эллиптических задач в цилиндрических областях и в областях с особыми точками. Установлены теоремы существования для широкого класса правых частей и построена асимптотика решения при $t \rightarrow \infty$ при достаточно слабых условиях на коэффициенты. Полученные результаты позволили получить новые сведения о качественных свойствах решений эллиптических уравнений высокого порядка.

В. А. Кондратьевым (совместно с Л. А. Багировым) изучены также качественные свойства слабых решений эллиптических уравнений (порядка $2m$) в дивергентной форме с ограниченными измеримыми коэффициентами. Доказаны теоремы о гладкости решений в окрестности точки, где коэффициенты являются непрерывными функциями, и о существовании m -й производной решения в точке, где модуль непрерывности коэффициентов ведет себя подобно логарифму. Описано поведение на бесконечности решений уравнения, имеющих конечный интеграл энергии, при условии, что коэффициенты стабилизируются со скоростью логарифма. Для уравнений второго порядка с действительными коэффициентами доказан классический результат о знаке кривой производной при условии, что коэффициенты непрерывны в рассматриваемой

точке x_0 и модуль непрерывности ведет себя как $|\ln|x - x_0||^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Доказательство основано на результатах авторов об асимптотическом поведении решений обыкновенных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами.

Исследование математических проблем теории упругости. В. А. Кондратьевым (совместно с О. А. Олейник) изучались краевые задачи для системы уравнений теории упругости. Ими были предложены элементарные доказательства неравенств Корна и их обобщений, справедливых как для ограниченных, так и для некоторых классов неограниченных областей. Используя полученные неравенства, авторы исследовали первую и вторую смешанные краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Для каждой из названных задач найдено число линейно независимых решений, удовлетворяющих соответствующим однородным граничным условиям, а также требованию конечности интеграла Дирихле или энергии. Доказана единственность решения при определенных ограничениях на поведение его модуля в окрестности бесконечности. Изучен вопрос об устойчивости решения.

В 1988 г. В. А. Кондратьеву за цикл работ “Исследования краевых задач для дифференциальных операторов и их приложения в математической физике”, опубликованных в 1959–1985 гг., была присуждена Государственная премия. В 1998 г. В. А. Кондратьев награжден премией имени И. Г. Петровского.

Обзор В. А. Кондратьева и Е. М. Ландиса “Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка” [20] и монография Ю. В. Егорова и В. А. Кондратьева “On spectral theory of elliptic operators” [27], содержащие оригинальное введение в предмет исследования и систематическое изложение результатов, пользуются широкой популярностью среди специалистов. Полный список публикаций В. А. Кондратьева до 2003 г. содержится в монографии [37].

В. А. Кондратьев возглавляет большую научную школу. Он уделяет большое внимание работе со студентами, аспирантами, докторантами и стажерами. В. А. Кондратьев является соруководителем двух научных семинаров на механико-математическом факультете МГУ, избран членом Ученого совета механико-математического факультета МГУ. Среди его учеников 6 докторов наук, 35 кандидатов наук. Исследования в области качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, основы которых были заложены в работах В. А. Кондратьева, были развиты в работах его учеников: Р. А. Алиева, В. Н. Арефьева, И. В. Астаховой, Л. А. Багирова, Г. В. Гришиной, А. А. Конькова, О. Матевосяна, И. И. Мельникова, М. И. Нараленкова, В. А. Никишкина, В. С. Сомовола, Б. Ю. Стернина, В. И. Фейгина, И. В. Филимоновой, Т. С. Хачлаева, М. Х. Нгуена и других.

Владимир Александрович Кондратьев является выдающимся математиком, чьи идеи и методы, получившие международное признание, опережают время.

Владимир Александрович – сильный шахматист. И сегодня он является серьезным соперником.

Сердечно поздравляя Владимира Александровича Кондратьева с юбилеем, мы желаем ему новых успехов в научно-педагогической деятельности и крепкого здоровья.

*О. В. Бесов, В. С. Владимиров, В. В. Козлов, С. М. Никольский,
Ю. С. Осипов, С. И. Похожжаев, В. А. Садовничий*

Список основных публикаций В. А. Кондратьева

- [1] “О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$ ”, *Тр. ММО*, **10** (1961), 419–436.
- [2] “О разрешимости первой краевой задачи для эллиптических уравнений”, *Докл. АН СССР*, **136:4** (1961), 771–774.

- [3] “Краевые задачи для эллиптических уравнений в конических областях”, *Докл. АН СССР*, **153**:1 (1963), 27–29.
- [4] “Краевые задачи для параболических уравнений в замкнутых областях”, *Тр. ММО*, **15** (1966), 400–451.
- [5] “Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками”, *Тр. ММО*, **16** (1967), 209–292.
- [6] “О разрешимости первой краевой задачи для сильно эллиптических уравнений”, *Тр. ММО*, **16** (1967), 293–318.
- [7] “О задаче с косою производной”, *Матем. сб.*, **78**:1 (1969), 148–176 (совм. с Ю. В. Егоровым).
- [8] “О гладкости решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в кусочно-гладкой области”, *Дифференц. уравнения*, **6**:10 (1970), 1831–1843.
- [9] “О свойствах решений линейных эволюционных систем с эллиптической пространственной частью”, *Матем. сб.*, **81(123)**:3 (1970), 398–429 (совм. с С. Д. Эйдельманом).
- [10] “О линеаризации автономной системы в окрестности особой точки типа “узел””, *Матем. заметки*, **14**:6 (1973), 833–842 (совм. с В. С. Самоволом).
- [11] “Задача Коши с характеристическими точками на начальной поверхности”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1974, № 1, 84–92.
- [12] “Об эллиптических уравнениях в R^n ”, *Дифференц. уравнения*, **11**:3 (1975), 498–504 (совм. с Л. А. Багировым).
- [13] “О решении гиперболической задачи Коши при наличии характеристических точек начальной поверхности”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 1979, № 5, 97–104.
- [14] “Об асимптотических свойствах решений бигармонического уравнения”, *Дифференц. уравнения*, **17**:10 (1981), 1886–1899 (совм. с О. А. Олейник, И. Копачеком).
- [15] “О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена–Фаулера”, *Дифференц. уравнения*, **17**:4 (1981), 749–750 (совм. с В. С. Самоволом).
- [16] “О поведении обобщенных решений эллиптических уравнений второго порядка и системы теории упругости в окрестности граничной точки”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 1982, № 8, 135–152 (совм. с О. А. Олейник, И. Копачеком).
- [17] “Неулучшаемые оценки в пространствах Гёльдера для обобщенных решений бигармонического уравнения, системы уравнений Навье–Стокса и системы Кармана в негладких двумерных областях”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1983, № 6, 22–39 (совм. с О. А. Олейник).
- [18] “Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях”, *УМН*, **38**:2 (1983), 3–76 (совм. с О. А. Олейник).
- [19] “Полулинейные уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой”, *Матем. заметки*, **44**:4 (1988), 457–468 (совм. с Е. М. Ландисом).
- [20] “Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка”, *Дифференциальные уравнения с частными производными - 3*, Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундам. напр., **32**, ВИНТИ, М., 1988, 99–215 (совм. с Е. М. Ландисом).
- [21] “О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка”, *Матем. сб.*, **135(177)**:3 (1988), 346–360 (совм. с Е. М. Ландисом).
- [22] “Об асимптотике вблизи границы решения сингулярной краевой задачи для полулинейного эллиптического уравнения”, *Дифференц. уравнения*, **26**:3 (1990), 465–468 (совм. с В. А. Никишкиным).

- [23] “Об асимптотике решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве”, *Матем. сб.*, **182**:4 (1991), 508–525 (совм. с Л. А. Багировым).
- [24] “Разрешимость задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в выпуклой области”, *Дифференц. уравнения*, **28**:5 (1992), 806–818 (совм. с Ю. А. Алтуховым).
- [25] V. A. Kondratyev, “On the properties of generalized solutions of elliptic equations”, *Russian J. Math. Phys.*, **1**:2 (1993), 139–164. (with L. A. Bagirov).
- [26] “Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля”, *УМН*, **51**:3 (1996), 73–144 (совм. с Ю. В. Егоровым).
- [27] *On spectral theory of elliptic operators*, Oper. Theory Adv. Appl., **89**, Birkhäuser, Basel, 1996 (with Yu. Egorov).
- [28] “Asymptotic behaviour of solutions of some nonlinear parabolic or elliptic equations”, *Asymptot. Anal.*, **14**:2 (1997), 117–156 (with L. Véron).
- [29] “Об одном семействе экстремальных задач и связанных с ним свойствах одного интеграла”, *Матем. заметки*, **64**:6 (1998), 830–838 (совм. с А. П. Буслаевым, А. И. Назаровым).
- [30] “Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях”, *Матем. сб.*, **189**:3 (1998), 45–68 (совм. с Ю. В. Егоровым, О. А. Олейник).
- [31] “О взрывающихся решениях параболических уравнений второго порядка”, *Докл. РАН*, **364**:5 (1999), 590–592 (совм. с Ю. В. Егоровым).
- [32] “Об условиях существования решений квазилинейного неравенства в полупространстве”, *Матем. заметки*, **67**:1 (2000), 150–152 (совм. с В. А. Галактионовым, Ю. В. Егоровым, С. И. Похожаевым).
- [33] “On the necessary conditions of global existence to a quasilinear inequality in the half-space”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **330**:2 (2000), 93–98 (with Yu. V. Egorov, V. A. Galaktionov, S. I. Pohozaev).
- [34] “On the summability in L^p of positive solutions of elliptic equations”, *Russ. J. Math. Phys.*, **7**:2 (2000), 206–215 (with S. D. Eidel’man).
- [35] “On completeness of root functions of elliptic boundary problems in a domain with conical points on the boundary”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **334**:8 (2002), 649–654 (with Yu. V. Egorov, B.-W. Schulze).
- [36] “Discreteness of spectrum for the magnetic Schrödinger operators”, *Comm. Partial Differential Equations*, **27**:3–4 (2002), 477–525 (with M. Shubin).
- [37] “Some problems in the qualitative theory of differential equations”, *J. Nat. Geom.*, **23**:1–2 (2003), 1–126 (with I. V. Astashova, A. V. Filinovskii, L. A. Muravei).
- [38] “Discreteness of spectrum and strict positivity criteria for magnetic Schrödinger operators”, *Comm. Partial Differential Equations*, **29**:3–4 (2004), 489–521 (with V. Maz’ya, M. Shubin).
- [39] “Positive solutions to superlinear second-order divergence type elliptic equations in cone-like domains”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **22**:1 (2005), 25–43 (with V. Liskevich, V. Moroz).