Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Баскаков, Когомологии K -степеней пространств и комбинаторика симплицальных разбиений, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 5, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm558>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 05:05:59

КОГОМОЛОГИИ K -СТЕПЕНЕЙ ПРОСТРАНСТВ И КОМБИНАТОРИКА СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ РАЗБИЕНИЙ

И. В. БАСКАКОВ

Пусть K – симплициальный комплекс, $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ – множество его вершин. Определим K -степень пары топологических пространств (X, W) следующей формулой:

$$\mathcal{Z}_K(X, W) = \bigcup_{\sigma \in K} X^\sigma \times W^{V \setminus \sigma} \subset X^V,$$

где $X^\sigma \times W^{V \setminus \sigma} = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_i \in X, \text{ если } i \in \sigma, \text{ иначе } x_i \in W\}$ (см. [1]).

В настоящей статье изучаются когомологии пространства $\mathcal{Z}_K(X, W)$ и описывается их связь с комбинаторикой симплициального разбиения K .

Как легко видеть, конструкция пространства $\mathcal{Z}_K(X, W)$ функториальна относительно отображения пар $(X_1, W_1) \rightarrow (X_2, W_2)$. Кроме того, если X – топологический коммутативный моноид, W – подмоноид, то $\mathcal{Z}_K(X, W)$ превращается в функтор на категории симплициальных комплексов следующим образом. Пусть $\varphi: K' \rightarrow K''$ – симплициальное отображение комплекса K' в K'' , $V' = \{v'_1, \dots, v'_{m'}\}$ и $V'' = \{v''_1, \dots, v''_{m''}\}$ – их множества вершин, тогда индуцированное отображение $\varphi_{\mathcal{Z}}$ задается по формуле:

$$\varphi_{\mathcal{Z}}((x_1, \dots, x_{m'})) = \left(\prod_{\varphi(v'_j)=v''_1} x_j, \dots, \prod_{\varphi(v'_j)=v''_{m''}} x_j \right).$$

Более того, для пары некоммутативных моноидов (X, W) любое симплициальное отображение $K' \rightarrow K''$, сохраняющее порядок вершин, индуцирует отображение пространств $\mathcal{Z}_K(X, W)$ по указанной выше формуле.

Единичный диск $D^2 \subset \mathbb{C}$ в поле комплексных чисел дает пару коммутативных моноидов $(D^2, \partial D^2)$. Пространство $\mathcal{Z}_K(D^2, \partial D^2)$ называется момент-угол-комплексом $\mathcal{Z}_K$ [1]. Впервые это пространство появилось в [2]. Детальное изучение его свойств дано в [1]. В [1] в кольце когомологий момент-угол-комплекса была введена биградуировка. Следующая теорема описывает структуру биградуированного кольца когомологий $\mathcal{Z}_K$ через когомологии полных подкомплексов в K .

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место функториальный изоморфизм:*

$$H^{-j, 2i}(\mathcal{Z}_K) = \bigoplus_{\gamma \subset V, |\gamma|=i} \tilde{H}^{i-j-1}(K_\gamma),$$

где $K_\gamma = \{\eta \in K \mid \eta \subset \gamma\}$ – полный подкомплекс на вершинах из γ . Кроме того, если $\alpha \in \tilde{H}^i(K_{\gamma_1})$ и $\chi \in \tilde{H}^j(K_{\gamma_2})$, то

$$\alpha \smile \chi = \begin{cases} 0, & \gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset, \\ i^* \lambda^*(\alpha \otimes \chi), & \gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset, \end{cases}$$

где $\lambda: \tilde{C}^*(K_{\gamma_1}) \otimes \tilde{C}^*(K_{\gamma_2}) \rightarrow \tilde{C}^{*+1}(K_{\gamma_1} * K_{\gamma_2})$ – изоморфизм, $i: K_{\gamma_1} \sqcup \gamma_2 \rightarrow K_{\gamma_1} * K_{\gamma_2}$ – вложение, а $K_{\gamma_1} * K_{\gamma_2}$ – джойн K_{γ_1} и K_{γ_2} .

Рассмотрим теперь кольцо Стенли–Райснера $\mathbb{k}(K)$ [3], т.е. фактор-кольцо $\mathbb{k}[v_1, \dots, v_m]/\mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ – идеал в кольце многочленов $\mathbb{k}[v_1, \dots, v_m]$, порожденный мономами $v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ такими, что $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} \notin K$.

Согласно [1; теорема 4.2.2] имеет место изоморфизм биградуированных алгебр

$$H^{*,*}(\mathcal{Z}_K; \mathbb{k}) \cong \text{Tor}_{\mathbb{k}[v_1, \dots, v_m]}^{*,*}(\mathbb{k}(K), \mathbb{k}),$$

где $\mathbb{k}$ – поле. Из этого результата и теоремы 1 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого поля $\mathbb{k}$ имеет место функториальный изоморфизм алгебр*

$$\bigoplus_{\gamma \subset V, |\gamma|=i} \tilde{H}^{i-j-1}(K_\gamma; \mathbb{k}) \cong \text{Tor}_{\mathbb{k}[v_1, \dots, v_m]}^{-j, 2i}(\mathbb{k}(K), \mathbb{k}).$$

Аддитивный вариант этой теоремы дает известная теорема Хохстера [4].

Функториальность в теоремах 1 и 2 понимается в следующем смысле. Пусть $\varphi: K' \rightarrow K''$ – симплициальное отображение, тогда оно индуцирует гомоморфизм $\varphi_{\mathcal{Z}}^*$ биградуированных колец когомологий $\mathcal{Z}_K$, который следующим образом согласован с указанным в теореме 1 разложением $H^{-j, 2i}(\mathcal{Z}_K)$. Пусть $\varphi_{\mathcal{Z}, \gamma', \gamma''}^* = \pi_{\tilde{H}^*(K_{\gamma'})} \circ \varphi_{\mathcal{Z}}^*|_{\tilde{H}^*(K_{\gamma''})}$ – проекция ограничения $\varphi_{\mathcal{Z}}$ на когомологии полных подкомплексов, где $\pi_{\tilde{H}^*(K_{\gamma'})}$ – проекция на прямое слагаемое. Тогда $\varphi_{\mathcal{Z}, \gamma', \gamma''}^* = \varphi_{\gamma', \gamma''}^*$, если $\varphi(\gamma') = \gamma''$ и $|\gamma'| = |\gamma''|$, где $\varphi_{\gamma', \gamma''}: K_{\gamma'} \rightarrow K_{\gamma''}$ индуцировано φ , и $\varphi_{\mathcal{Z}, \gamma', \gamma''}^* = 0$ во всех остальных случаях. Наконец, отображение Тог-алгебр кольца Стенли–Райснера в правой части в теореме 2 индуцируется $\varphi_{\mathbb{k}}^*: \mathbb{k}[v_1'', \dots, v_{m''}''] \rightarrow \mathbb{k}[v_1', \dots, v_{m'}']$ таким, что $\varphi_{\mathbb{k}}^*(v_i'') = \sum_{\varphi(v_j')=v_i''} v_j'$.

Рассмотрим теперь точную последовательность клеточной пары (X, W) над полем $\mathbb{k}$, пусть $\delta^*: H^*(W; \mathbb{k}) \rightarrow H^{*+1}(X, W; \mathbb{k})$ – кограничный оператор. Положим $A = \text{Ker}(\delta^*)$, $\tilde{B} = \text{Im}(\delta^*)$; выберем $B \subset H^*(W; \mathbb{k})$ и $C \subset H^*(X, W; \mathbb{k})$ так, чтобы $A \oplus B = H^*(W; \mathbb{k})$ и $\tilde{B} \oplus C = H^*(X, W; \mathbb{k})$. Следующий результат описывает аддитивную структуру кольца когомологий $\mathcal{Z}_K(X, W)$.

ТЕОРЕМА 3.

$$H^{*+1}(\mathcal{Z}_K(X, W); \mathbb{k}) = \bigoplus_{\sigma \in K} \bigoplus_{\substack{\beta \subset V \\ \beta \cap \sigma = \emptyset}} \tilde{H}^*(\text{link}_{K_{\sigma \cup \beta}} \sigma; \mathbb{k}) \otimes C^{\sigma} \otimes B^{\beta} \otimes A^{V \setminus \sigma \cup \beta}.$$

Напомним, что K является горенштейновым* [3] комплексом над $\mathbb{k}$, если когомологии с коэффициентами в $\mathbb{k}$ линка любого симплекса из K равны когомологиям сферы соответствующей размерности.

Из теоремы 3 для пары $(M^n, \partial M^n)$, где M^n – многообразие, а ∂M^n – его граница, получаем в качестве следствия

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если K – горенштейнов* комплекс над полем $\mathbb{k}$, то для $\mathcal{Z}_K(M^n, \partial M^n)$ имеет место двойственность Пуанкаре над $\mathbb{k}$, которая переводит $\tilde{H}^*(\text{link}_{K_{\sigma \cup \beta}} \sigma; \mathbb{k}) \otimes C^{\sigma} \otimes B^{\beta} \otimes A^{V \setminus \sigma \cup \beta}$ в $\tilde{H}^*(\text{link}_{K_{V \setminus \beta}} \sigma; \mathbb{k}) \otimes C^{\sigma} \otimes B^{V \setminus \sigma \cup \beta} \otimes A^{\beta}$, где $\sigma \in K$, $\beta \subset V$ и $\sigma \cap \beta = \emptyset$, и таким образом сохраняет доказанное в теореме 3 разложение когомологий пространства $\mathcal{Z}_K(M^n, \partial M^n)$ в прямую сумму.

Следующее предложение дает необходимое условие того, что $\mathcal{Z}_K(M^n, \partial M^n)$ – многообразие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\mathcal{Z}_K(M^n, \partial M^n)$ – многообразие, то K – горенштейнов* комплекс.

Достаточным условием является то, что K – симплициальная сфера.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.М. Бухштаберу за неоценимую помощь и внимание, проявленное на всех этапах написания данной статьи, а также доценту Т.Е. Панову за полезное обсуждение результатов настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов // УМН. 2000. Т. 55. №5. С. 3–106. [2] М. Davis, T. Januszkiewicz // Duke Math. J. 1991. V. 62. №2. P. 417–451. [3] R. Stanley. Combinatorics and Commutative Algebra. Basel: Birkhäuser, 1996. [4] M. Hochster // Lecture Notes in Pure Appl. Math. 1977. V. 26. P. 171–223.