Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Антипова, Обращения многомерных преобразований Меллина, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 5, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5580>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:27:43

Обращения многомерных преобразований Меллина

И. А. Антипова

Преобразования Меллина для функций одного переменного были введены им в 1896 г. [1]. Они отличаются от преобразований Лапласа лишь тем, что заменой $x = e^{-t}$ сводятся к последним. Их рассмотрение позволило Меллину выделить естественный класс функций, для которых справедлива формула обращения. Применительно к преобразованию Лапласа такая формула обращения играет большую роль в операционном исчислении и в теории обработки сигналов. Видимо, первое внедрение многомерного преобразования Меллина было сделано также им, в 1921 г. в статье [2], где в качестве применения было доказано, что решение общего алгебраического уравнения представляется гипергеометрическим рядом от переменных коэффициентов уравнения. Однако в краткой статье [2] Меллин ничего не писал о справедливости многомерной формулы обращения – вероятно, в нужном ему примере он знал ее обоснование с помощью повторных одномерных процедур.

Цель настоящей статьи – ввести подходящие классы функций многих переменных, на которых справедливы обе формулы обращения $MM^{-1} = I = M^{-1}M$ для прямого и обратного преобразований Меллина M и M^{-1} . Преобразование Меллина функции $\Phi(x)$, заданной в ортанте $\mathbb{R}_+^n$ (произведении положительных вещественных полуосей), определяется интегралом

$$M[\Phi](z) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \Phi(x) x^{z-I} dx,$$

где мультииндексная запись x^{z-I} означает $x_1^{z_1-1} \cdots x_n^{z_n-1}$. Соответственно, обратное преобразование Меллина функции $F(z)$, заданной в мнимом (вертикальном) подпространстве $a + i\mathbb{R}^n$ (a – фиксированный вектор из вещественного подпространства $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$), – это интеграл

$$M^{-1}[F](x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{a+i\mathbb{R}^n} F(z) x^{-z} dz.$$

Введем два класса голоморфных функций от n переменных, сопоставленных паре выпуклых областей. Рассмотрим два экземпляра пространства $\mathbb{R}^n$ переменных u и θ . Выберем в них выпуклые области $U \subset \mathbb{R}^n$, $\Theta \subset \mathbb{R}^n$, причем полагаем Θ ограниченной и содержащей начало координат: $0 \in \Theta$. Область U порождает в комплексном пространстве трубчатую область $U + i\mathbb{R}^n$ (трубу над U), а Θ – секториальную область (сектор S_Θ над Θ). Более точно, секториальные области будем брать в множестве $\mathfrak{S} = \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n$, которое представляет собой область наложения над комплексным тором $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Точки $x = (r, \theta) \in \mathfrak{S}$ ($r \in \mathbb{R}_+^n$, $\theta \in \mathbb{R}^n$) проектируются в векторы $re^{i\theta} = (r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n}) \in \mathbb{T}^n$. Тогда сектор над Θ – это множество $S_\Theta = \{x \in \mathfrak{S} : \theta \in \Theta\}$. На $\mathbb{T}^n$ такие функции можно рассматривать как многозначные, если Θ не помещается в куб $[0; 2\pi]^n$ параллельным переносом. Итак, пусть:

M_Θ^U – векторное пространство функций $\Phi(x)$, голоморфных в какой-либо области

$$S_{k\Theta} = \{x \in \mathfrak{S} : \arg x \in k\Theta\}, \quad k > 1$$

(k зависит от Φ и $k\Theta$ означает гомотетию Θ с коэффициентом k), и удовлетворяющих условию

$$|\Phi(x)| \leq C(a) |x|^{-a} \quad \text{для всех } x \in S_{k\Theta}, \quad a \in U,$$

где $C(a)$ не зависит от x ;

W_U^Θ – векторное пространство функций $F(z) = F(u+iv)$, голоморфных в трубчатой области $U + i\mathbb{R}^n$ и убывающих в ней экспоненциально по v :

$$|F(u+iv)| \leq K(u)e^{-kH_\Theta(v)}, \quad k > 1,$$

где $H_\Theta(v) := \sup_{\theta \in \Theta} \langle \theta, v \rangle$ – опорная функция для Θ .

ТЕОРЕМА 1. Если $\Phi(x) \in M_\Theta^U$, то ее преобразование Меллина существует, принадлежит W_U^Θ и справедлива формула $M^{-1}M[\Phi] = I[\Phi]$, т. е.

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{a+i\mathbb{R}^n} x^{-z} dz \int_{\mathbb{R}_+^n} \Phi(\zeta) \zeta^{z-I} d\zeta = \Phi(x), \quad x \in S_{k\Theta}, \quad (1)$$

где $a \in U$.

ТЕОРЕМА 2. Если $F(z) \in W_U^\Theta$, то ее обратное преобразование Меллина существует, принадлежит M_Θ^U и справедлива формула $MM^{-1}[F] = I[F]$, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} x^{z-I} dx \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{a+i\mathbb{R}^n} F(t) x^{-t} dt = F(z), \quad z \in U + i\mathbb{R}^n, \quad (2)$$

где $a \in U$.

Идея доказательства теоремы 2 следующая. Заменой переменной $x_j = e^{\eta_j}$ левая часть (2) сводится к повторному интегралу: внешний интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} d\eta$, а внутренний интеграл по $t \in a + i\mathbb{R}^n$ от функции $F(t)e^{-\langle \eta, t-z \rangle}$. Введением сферических координат $\eta = \rho\chi$, $\chi \in S^{n-1} = \{\|\eta\| = 1\}$ и интегрированием по $\rho \in \mathbb{R}_+$ интеграл (2) сводится к $(2n-1)$ -мерному интегралу

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{S^{n-1}} \sigma(\chi) \int_{\operatorname{Re} z + \varepsilon\chi + i\mathbb{R}^n} \frac{F(t) dt}{\langle \chi, t-z \rangle^n},$$

где $\sigma(\chi)$ – форма объема на S^{n-1} , а ε выбрано так, чтобы $\operatorname{Re} z + \varepsilon S^{n-1} \subset U$. Затем с помощью известных процедур Лере–Хенкина доказывается, что последний интеграл сводится к интегралу Коши–Фанташье и, тем самым, представляет функцию $F(z)$.

Теорема 1 сводится к теореме 2 заменой функции $\Phi(\zeta)$ на $\Phi(e^{i\omega}) \prod_{j=1}^n e^{i\omega_j \frac{(\alpha_j + \beta_j)}{2}}$, где α_j, β_j таковы, что параллелепипед $\prod_{j=1}^n [\alpha_j, \beta_j]$ вписан в U и содержит a .

Приведенные формулы (1), (2) применяются к получению интегрального представления для решения $y(x)$ общего алгебраического уравнения

$$x_n y^n + \dots + x_{q+1} y^{q+1} + y^q + x_{q-1} y^{q-1} + \dots + x_1 y - 1 = 0,$$

где $1 \leq q \leq n$. Случай $q = n$ был рассмотрен Меллином. Отметим, что Меллин предъявил неполную область сходимости интеграла для $y(x)$, поскольку им не были предъявлены классы M_Θ^U и W_U^Θ . Наше описание области сходимости интеграла в определенном смысле симметрично описанию (см. [3]) области сходимости степенного ряда для $y(x)$.

Список литературы

- [1] H. Mellin, *Acta Soc. Sci. Fennicae*, **21**:1 (1896), 1–115. [2] H. Mellin, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **172** (1921), 658–661. [3] M. Passare, A. Tsikh, *The legacy of Niels Henrik Abel* (Oslo, Norway, 2002), Springer, Berlin, 2004, 653–672.

И. А. Антипова (I. A. Antipova)
Красноярский государственный технический
университет
E-mail: antipova@akadem.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
04.08.2007