Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Широков, О супераддитивности выпуклого замыкания выходной энтропии квантового канала, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 6, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5582>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 16:36:33

О супераддитивности выпуклого замыкания выходной энтропии квантового канала

М. Е. Широков

Одним из основных достижений квантовой теории информации (см. [1]) последних лет является доказательство эквивалентности различных гипотез (суб-, супер-) аддитивности для конечномерных квантовых каналов и систем [2] (см. обзор в [3]). Основной целью данной статьи является обобщение этого результата на бесконечномерный случай.

Пусть $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ – сепарабельные гильбертовы пространства. Квантовым каналом называется линейное вполне положительное сохраняющее след отображение $\Phi: \mathfrak{I}(\mathcal{H}) \mapsto \mathfrak{I}(\mathcal{H}')$, где $\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ – идеал всех ядерных операторов в $\mathcal{H}$. В частности, Φ порождает аффинное отображение выпуклого множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ состояний (операторов плотности) на пространстве $\mathcal{H}$ в множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ состояний на пространстве $\mathcal{H}'$ [1].

Важными характеристиками квантового канала являются его выходная энтропия $H_\Phi(\rho) = H(\Phi(\rho))$ – вогнутая полунепрерывная снизу функция на пространстве состояний входной системы с множеством значений $[0, +\infty]$ – и ее выпуклое замыкание (см. [4]), которое будем обозначать $\hat{H}_\Phi(\rho)$ и называть $\hat{H}$ -функцией канала Φ . В [5] показано, что выпуклое замыкание выходной энтропии произвольного квантового канала определяется выражением

$$\hat{H}_\Phi(\rho) = \inf_{\mu} \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H_\Phi(\sigma) \mu(d\sigma), \quad (1)$$

в котором точная нижняя грань берется по множеству всех вероятностных мер на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ с барицентром ρ , и что эта нижняя грань всегда достигается на некоторой мере с носителем на множестве чистых состояний.

В [5] (предложение 7) получено достаточное условие непрерывности $\hat{H}$ -функции бесконечномерного канала Φ на подмножестве состояний, которое равносильно следующему утверждению:

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} H_\Phi(\rho_n) = H_\Phi(\rho_0) < +\infty \right\} \Rightarrow \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{H}_\Phi(\rho_n) = \hat{H}_\Phi(\rho_0) \right\}. \quad (2)$$

Свойство супераддитивности $\hat{H}$ -функции для каналов Φ и Ψ состоит в выполнении неравенства

$$\hat{H}_{\Phi \otimes \Psi}(\omega) \geq \hat{H}_\Phi(\omega^{\mathcal{H}}) + \hat{H}_\Psi(\omega^{\mathcal{K}}) \quad (3)$$

для всех $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, где $\omega^{\mathcal{H}} = \text{Tr}_{\mathcal{K}} \omega$ и $\omega^{\mathcal{K}} = \text{Tr}_{\mathcal{H}} \omega$. Данное свойство гарантирует аддитивность минимальной выходной энтропии для каналов Φ и Ψ (см. [1], [3]). Если Φ и Ψ – частичные следы, то супераддитивность $\hat{H}$ -функции для этих каналов означает супераддитивность “сцепленности формирования” EoF (*Entanglement of Formation*) – важной характеристики состояния составной квантовой системы, являющейся мерой его сцепленности (см. [1], [5]).

Для конечномерных каналов Φ и Ψ супераддитивность $\hat{H}$ -функции равносильна аддитивности χ -пропускной способности этих каналов с произвольными ограничениями [6]. Одним из препятствий для доказательства аналогичного утверждения для бесконечномерных каналов является существование суперсцепленных состояний – чистых состояний составной системы, имеющих частичные следы с бесконечной энтропией (см. замечание 4 в [7]). Именно наличие таких состояний не позволяло до сих пор доказать супераддитивность $\hat{H}$ -функции (и даже аддитивность минимальной выходной энтропии) для некоторых классов бесконечномерных каналов, для которых аддитивность χ -пропускной способности с произвольными ограничениями выведена в [7] из соответствующих конечномерных утверждений [6], [8].

Работа выполнена при поддержке научной программы Отделения математических наук РАН “Современные проблемы теоретической математики” и РФФИ (проект № 06-01-00164-а).

Частично проблему суперсцепленных состояний удастся преодолеть с помощью следующего утверждения, играющего ключевую роль в доказательстве всех приведенных ниже результатов, которое получено на основе свойства непрерывности [2] и некоторых других результатов из [5].

ЛЕММА. Пусть $\Phi: \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ и $\Psi: \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ – произвольные квантовые каналы. Неравенство (3) имеет место для всех состояний ω из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$, если для любого состояния конечного ранга ω_0 из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ с конечной выходной энтропией $H_{\Phi \otimes \Psi}(\omega_0)$ существует последовательность $\{\omega_n\}$ состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ со свойствами: (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_n = \omega_0$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_{\Phi \otimes \Psi}(\omega_n) = H_{\Phi \otimes \Psi}(\omega_0)$, (ii) неравенство (3) имеет место при $\omega = \omega_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

С помощью данной леммы, предложения 7 и теоремы 2 из [7], а также теоремы 1 из [9], получаем бесконечномерный вариант результатов из [9], [6], [8].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть Ψ – произвольный канал. Супераддитивность $\hat{H}$ -функции имеет место в следующих случаях: (i) Φ – тождественный канал; (ii) Φ – канал, разрушающий сцепленность (см. [3]); (iii) Φ – канал, комплементарный (см. [9]) каналу, разрушающему сцепленность; (iv) Φ – прямая сумма (см. [6]) тождественного канала и канала Φ_0 такого, что супераддитивность $\hat{H}$ -функции имеет место для каналов Φ_0 и Ψ .

Приведенная выше лемма позволяет доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Если супераддитивность $\hat{H}$ -функции имеет место для всех конечномерных квантовых каналов, то это свойство имеет место и для всех бесконечномерных квантовых каналов.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если супераддитивность ЕоФ имеет место для всех состояний конечномерной составной квантовой системы, то это свойство имеет место и для всех состояний бесконечномерной составной квантовой системы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если аддитивность минимальной выходной энтропии имеет место для всех конечномерных квантовых каналов, то это свойство имеет место и для всех бесконечномерных квантовых каналов.

Теорема 1 и теорема 3 из [7] позволяют получить бесконечномерный вариант теоремы Шора [2].

ТЕОРЕМА 2. Следующие свойства равносильны: (i) аддитивность χ -пропускной способности для всех бесконечномерных каналов с произвольными ограничениями; (ii) аддитивность минимальной выходной энтропии для всех бесконечномерных каналов; (iii) супераддитивность ЕоФ для всех состояний произвольной бесконечномерной составной квантовой системы.

Последнее свойство в теореме 2 равносильно супераддитивности $\hat{H}$ -функции для всех бесконечномерных квантовых каналов.

Доказательства всех утверждений данной статьи приведены в [10].

Список литературы

- [1] А. С. Холево, *Введение в квантовую теорию информации*, МЦНМО, М., 2002.
 [2] P. W. Shor, *Comm. Math. Phys.*, **246**:3 (2004), 453–472; corrections: *ibid.* 473. [3] А. С. Холево, *УМН*, **61**:2 (2006), 113–152. [4] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974. [5] М. Е. Широков, [arXiv: quant-ph/0411091](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0411091). [6] А. С. Холево, М. Е. Широков, *Comm. Math. Phys.*, **249**:2 (2004), 417–430. [7] М. Е. Широков, *Comm. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 137–159. [8] P. W. Shor, *J. Math. Phys.*, **43**:9 (2002), 4334–4340. [9] А. С. Холево, *Теория вероятн. и ее примен.*, **51**:1 (2006), 133–143. [10] М. Е. Широков, [arXiv: quant-ph/0608090](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0608090).

М. Е. Широков (M. E. Shirokov)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 E-mail: msh@mi.ras.ru

Представлено А. В. Булинским
 Принято редколлегией
 24.10.2006