Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, Об одном обобщении теоремы Понселе,
УМН, 2006, том 61, выпуск 6, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5583>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:16:36

Об одном обобщении теоремы Понселе

В. Ю. Протасов

Теоремы о замыкании, такие как теорема Штейнера, теорема Понселе и теорема о зигзаге, изучались во множестве работ и нашли применения в классической геометрии, теории алгебраических кривых, дифференциальных уравнениях и т. д. (см. работы [1]–[4] и библиографию в них). Мы установим, что три классические теоремы о замыкании являются частными случаями более общего утверждения (теорема 1). Везде далее $\mathbb{R}^2$ – евклидова плоскость, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение.

Процесс Штейнера. Даны окружности α_0 и α_1 (α_1 внутри α_0). Пусть $\mathcal{M}$ – множество окружностей, касающихся α_0, α_1 и лежащих между ними. Для произвольной $\gamma_1 \in \mathcal{M}$ выбирается $\gamma_2 \in \mathcal{M}$, касающаяся γ_1 , далее для $k \geq 3$ окружность $\gamma_k \in \mathcal{M}$ касается γ_{k-1} и отлична от γ_{k-2} . Процесс имеет период $n \geq 2$, если $\gamma_{n+1} = \gamma_1$.

ТЕОРЕМА А (Штейнер). *Если процесс Штейнера периодичен для некоторой начальной окружности γ_1 , то и для любой $\gamma_1 \in \mathcal{M}$ он будет иметь тот же период.*

Процесс Понселе. Даны окружности α и δ . Через точку $D_1 \in \delta$ проводится касательная к α , она вторично пересекает δ в точке D_2 . Через D_2 проводится вторая касательная к α , она вторично пересекает δ в точке D_3 и т. д. Процесс периодичен, если $D_{n+1} = D_1$.

ТЕОРЕМА В (Понселе [5]). *Если процесс Понселе имеет период $n \geq 3$, причем точки $D_1, \dots, D_n$ различны, то для любой начальной точки $D_1 \in \delta$, из которой можно провести касательную к α , он имеет тот же период.*

Общая теорема Понселе верна для пары произвольных невырожденных коник α и δ . Она сводится к случаю двух окружностей проективным преобразованием.

Зигзаг-процесс. Даны окружности σ и δ , ни одна из них не содержит центр другой. Дано число $\rho > 0$. Возьмем $D_1 \in \delta$, $S_1 \in \sigma$ такие, что $D_1 S_1 = \rho$. Далее берем точку $D_2 \in \delta$, для которой $D_2 S_1 = \rho$ и $D_2 \neq D_1$ (если таковой не существует, то $D_2 = D_1$), затем точку $S_2 \in \sigma$ такую, что $S_2 D_2 = \rho$, $S_2 \neq S_1$ (иначе $S_2 = S_1$), и т. д. Зигзаг имеет период n , если $D_{n+1} = D_1$.

ТЕОРЕМА С (теорема о зигзаге [6]). *Если зигзаг имеет период $n \geq 3$, причем все промежуточные точки различны, то он имеет тот же период для любой точки $D_1 \in \delta$, из которой можно сделать первый шаг.*

Эlegantное доказательство теоремы С, использующее дифференциальные уравнения, было получено в [3], первое элементарное доказательство – в [7].

Для окружности γ , касающейся окружностей α_0, α_1 , индекс касания равен 0, если из двух касаний четное число внутренних, иначе индекс равен 1. Для $i = 0, 1$ $\mathcal{M}_i$ – множество окружностей, касающихся α_0 и α_1 с индексом i . Эти понятия распространяются и на случай, когда окружности вырождаются в прямые или точки.

Обобщенный процесс. На плоскости даны три окружности α_0, α_1 и δ . Каждая из них может вырождаться в прямую или точку. Фиксируем $i \in \{0, 1\}$. Предполагаем, что $\delta \notin \mathcal{M}_i$. Берется окружность $\gamma_1 \in \mathcal{M}_i$, пересекающая δ в точках D_1 и D_2 . Через D_2 проводим окружность $\gamma_2 \in \mathcal{M}_i$, отличную от γ_1 (если ее не существует, то полагаем $\gamma_2 = \gamma_1$), обозначаем через D_3 вторую точку пересечения γ_2 и δ , и т. д. Процесс имеет период n , если $D_{n+1} = D_1$.

ТЕОРЕМА 1. *Если обобщенный процесс имеет период $n \geq 3$, причем точки $D_1, \dots, D_n$ различны, то он имеет тот же период для любой окружности $\gamma_1 \in \mathcal{M}_i$, пересекающей δ .*

Теорема 1 $\Rightarrow$ **теорема А**. Все окружности γ_k принадлежат семейству $\mathcal{M}_1$. Тогда теорема А является частным случаем теоремы 1, в котором в качестве δ взята окружность с центром K_1 , ортогональная всем окружностям из $\mathcal{M}_1$.

Теорема 1 $\Rightarrow$ **теорема В**. Другой частный случай теоремы 1: окружность α_1 вырождается в точку. После инверсии с центром в точке α_1 получаем теорему В.

Теорема 1 $\Rightarrow$ **теорема С**. Еще один частный случай теоремы 1: окружности α_0 и α_1 концентричны. Взяв в качестве α_0 , α_1 окружности, концентрические σ и касающиеся всех окружностей с центрами на σ и с радиусами ρ , получаем теорему С.

Итак, в случае концентрических окружностей α_0 , α_1 теорема 1 превращается в теорему о зигзаге; в случае, когда α_0 является бесконечно удаленной точкой, получаем теорему Понселе; наконец, если δ является окружностью, ортогональной всем окружностям семейства $\mathcal{M}_1$, получаем теорему Штейнера.

Для любой пары окружностей, имеющих разные центры и радиусы, рассмотрим точки K_0 , K_1 – центры гомотетий, переводящих одну окружность в другую. Для каждого $i = 0, 1$ точка K_i имеет одну и ту же степень $p_i = d^2 - r^2$ относительно всех окружностей $\gamma \in \mathcal{M}_i$ (d – расстояние от K_i до центра γ , r – радиус γ). Окружность с центром K_i и радиусом $\sqrt{p_i}$ ортогональна всем окружностям семейства $\mathcal{M}_i$ и содержит все точки их касания друг с другом.

Доказательство теоремы 1. Можно считать, что хотя бы две из трех окружностей α_0 , α_1 , δ не вырождаются в точки, иначе утверждение тривиально. Проведя подходящую инверсию, считаем, что эти окружности не обращаются в прямые и имеют разные центры и радиусы. Пусть $i = 0$, в случае $i = 1$ все аналогично. Докажем, что общие хорды δ со всевозможными окружностями $\gamma \in \mathcal{M}_0$ касаются фиксированной коники α . Тогда теорема 1 будет следовать из теоремы Понселе, примененной к конике α и окружности δ . Пусть O – центр δ , R – ее радиус. Возьмем произвольную окружность $\gamma \in \mathcal{M}_0$, пересекающую δ . Пусть G , r – центр и радиус γ , прямая l – общая хорда δ и γ . Положим $a = \overrightarrow{OK_0}$, $b = \overrightarrow{OG}$. Имеем $(a - b)^2 - r^2 = p_0$. Для произвольной точки $L \in l$ положим $x = \overrightarrow{K_0L}$. Точка L имеет равные степени относительно δ и γ , откуда $(a + x)^2 - R^2 = (a + x - b)^2 - r^2$. Подставляя $r^2 = (a - b)^2 - p_0$, получаем $2(x, b) = R^2 - a^2 + p_0$. Так как $p = a^2 - R^2$ – степень K_0 относительно δ , то $(x, b) = \frac{1}{2}(p_0 - p)$. Поскольку центры G всевозможных окружностей $\gamma \in \mathcal{M}_0$ описывают конику Γ с фокусами в центрах α_0 , α_1 , прямые $l = \{a + x \mid (x, b) = \frac{1}{2}(p_0 - p)\}$ для всевозможных $b \in \Gamma$ описывают огибающую коники α , которая получается из двойственной коники Γ^* умножением на скаляр $(p_0 - p)/2$ и переносом на вектор b .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Явный вид коники α , найденный в доказательстве, позволяет применить теорему Кэли [1] и получить аналитический критерий n -периодичности обобщенного процесса.

Список литературы

- [1] P. Griffiths, J. Harris, *Enseign. Math.* (2), **24** (1978), 31–40. [2] W. Barth, J. Michel, *Math. Ann.*, **295**:1 (1993), 25–49. [3] W. L. Black, H. C. Howland, B. Howland, *Amer. Math. Monthly*, **81**:7 (1974), 754–757. [4] V. Burskii, A. Zhedanov, *RIAM Symposium* № 16ME-S1 (Japan, 2004), article № 24; <http://www.riam.kyushu-u.ac.jp/fluid/meeting/16ME-S1>. [5] J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Bachelier, Paris, 1822 (1st ed.), 1865. [6] O. Bottema, *Elem. Math.*, **20**:1 (1965), 1–7. [7] A. Hraskó, *Elem. Math.*, **55**:2 (2000), 45–62.

В. Ю. Протасов (V. Yu. Protasov)

Московский государственный

университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: vladimir_protasov@yahoo.com

Представлено В. М. Тихомировым

Принято редколлегией

27.10.2006