Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Вечтомов, О. В. Старостина, Структура абелево-регулярных положительных полуколец, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 1, 199–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5584>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:24:56

Структура абелево-регулярных положительных полуколец

Е. М. Вечтомов, О. В. Старостина

1. Полукольцо S называется *абелево-регулярным положительным* или *агр-полукольцом*, если S – положительное (т.е. элемент $a+1$ обратим в S для любого $a \in S$) и абелево-регулярное полукольцо (т.е. для каждого $a \in S$ уравнение $axa = a$ разрешимо в S и любой его идемпотент e перестановочен со всеми элементами из S) [1]. Основные понятия и структурная теория класса агр-полуколец развиты в работе [1].

Пусть $L(S)$ – множество всех идемпотентов агр-полукольца S , а $U(S)$ – множество всех обратимых элементов в S . Изучение агр-полуколец сводится к изучению троек $\langle L(S), U(S), \varphi_S \rangle$.

$\langle U(S), +, \cdot \rangle$ – полутело без нуля относительно операций сложения и умножения в S . $\langle L(S), \vee, \cdot \rangle$ – дистрибутивная решетка с 0 и 1 относительно операции умножения $\cdot$ полукольца S и сложения $\vee$. При этом операция сложения $\vee$ определяется следующим образом: так как каждый элемент a агр-полукольца S представляется в виде произведения $a = e_a \cdot u$ однозначно определенного идемпотента $e_a \in L(S)$ и обратимого элемента $u \in U(S)$, то полагаем $f \vee g = e_{f+g}$. Пусть для $u, v \in U(S)$ $u\varphi(e)v \Leftrightarrow eu = ev$. Отображение $\varphi = \varphi_S: e \mapsto \varphi(e)$ решетки $L(S)$ в решетку всех конгруэнций $\text{Con } U(S)$ полутела $U(S)$ является решеточным антигомоморфизмом.

Вводится также категория абстрактных троек $\langle L, U, \varphi \rangle$, состоящих из ограниченной дистрибутивной решетки L , полутела без нуля U и решеточного антигомоморфизма $\varphi: L \rightarrow \text{Con } U$, переводящего 0 в 1 и 1 в 0. Абстрактная тройка, соответствующая некоторому агр-полукольцу S , называется *индуцированной*.

В теории агр-полуколец возникают следующие естественные вопросы [1]:

- 1) всякая ли тройка $\langle L, U, \varphi \rangle$ индуцируется некоторым агр-полукольцом?
- 2) следует ли из изоморфизма индуцированных троек изоморфизм соответствующих агр-полуколец?

В [1] был приведен пример неиндуцированной тройки (пример 3.2) и было установлено, что для индуцированности тройки $\langle L, U, \varphi \rangle$ достаточно, чтобы $\text{Im } \varphi$ содержался в некоторой булевой подрешетке решетки $\text{Con } U$ (теорема 3.3). Построение агр-полукольца по такой тройке $\langle L, U, \varphi \rangle$ осуществляется следующим образом. Пусть

$$S = \bigcup_{e \in L} U/\varphi(e)$$

есть дизъюнктное объединение факторполутел $U/\varphi(e) = \{[u]_{\varphi(e)} \mid u \in U\}$. Для любых $e \in L$ и $u \in U$ можно отождествить $[1]_{\varphi(e)} \equiv e$, $[u]_{\varphi(1)} \equiv u$, тогда $[u]_{\varphi(e)} = eu$. Операции умножения и сложения определяются следующим образом: $eu \cdot fv = ef \cdot uv$, $eu + fv = (e \vee f)w$, где $e, f \in L$, $u, v, w \in U$ и обратимый элемент w удовлетворяет соотношениям $w\varphi(e)(u+v)$, $w(\varphi(e) \circ \psi(f))u$, $w(\varphi(f) \circ \psi(e))v$.

Второй вопрос был положительно решен для предбулевых агр-полуколец, т.е. для полуколец, у которых $\text{Im } \varphi_S$ является булевой подрешеткой в решетке $\text{Con } U$, и для идемпотентных агр-полуколец [1; теоремы 4.1 и 5.6].

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Для любого агр-полукольца S образ $\text{Im } \varphi_S$ вкладывается в булеву подрешетку $\text{Con } U(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $e \in L(S)$ дополнением $\varphi(e)$ в решетке $\text{Con } U(S)$ является конгруэнция $\psi(e)$: $u\psi(e)v \Leftrightarrow u + ex = v + ey$ для некоторых $x, y \in U(S)$. Действительно, для любых элементов $u, v \in U(S)$ имеем $u\psi(e)(u + ev)\varphi(e)(u + v)$ и $v\psi(e)(v + eu)\varphi(e)(u + v)$. Откуда $u(\psi(e) \circ \varphi(e))v$. Если u, v – произвольные элементы полутела $U(S)$ такие, что $u(\psi(e) \cap \varphi(e))v$, то $eu = ev$ и $u + ex = v + ey$ для некоторых $x, y \in U(S)$. Складывая почленно последние два равенства, получаем $u + e(u + x) = v + e(v + y)$, или $u(1 + eu^{-1}(u + x)) = v(1 + ev^{-1}(v + y))$. Поскольку $e(u + x) = e(u + ex) =$

$e(v + ey) = e(v + y)$ и $eu^{-1} = ev^{-1}$, то $u = v$. Нетрудно убедиться в том, что $\text{Im } \varphi$ и $\text{Im } \psi$ порождают булеву подрешетку в решетке $\text{Con } U(S)$.

Отображение $\psi_S: L(S) \rightarrow \text{Con } U(S)$, $e \mapsto \psi(e)$ есть решеточный гомоморфизм.

Учитывая теорему 3.3 из [1], получаем следующие результаты, отвечающие на вопросы 1) и 2).

ТЕОРЕМА 1. *Абстрактная тройка $\langle L, U, \varphi \rangle$ является индуцированной тогда и только тогда, когда все элементы $\text{Im } \varphi_S$ дополняемы в $\text{Con } U$.*

Изоморфизмом индуцированных троек $\langle L_1, U_1, \varphi_1 \rangle$ и $\langle L_2, U_2, \varphi_2 \rangle$ называется пара (β, γ) таких изоморфизмов $\beta: L_1 \rightarrow L_2$, $\gamma: U_1 \rightarrow U_2$, что $u\varphi_1(e)v$ равносильно $\gamma(u)\varphi_2(\beta(e))\gamma(v)$.

ТЕОРЕМА 2. *Два произвольных агр-полукольца изоморфны тогда и только тогда, когда их индуцированные тройки изоморфны.*

2. В [1; § 4] было изучено строение конгруэнций на предбулевых полукольцах и доказано, что существует биекция между множеством всех конгруэнций ρ на предбулевом полукольце S и множеством всех согласованных пар (σ, τ) конгруэнций на $L(S)$ и $U(S)$. Этот результат можно уточнить и распространить на произвольные агр-полукольца.

Пусть σ – конгруэнция на дистрибутивной решетке $L(S)$ и τ – конгруэнция на полутеле $U(S)$. Пара конгруэнций (σ, τ) называется *согласованной*, если она удовлетворяет условию $e\sigma f \Rightarrow \tau \circ \varphi(e) = \tau \circ \varphi(f)$ для любых $e, f \in L(S)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Бинарное отношение ρ на агр-полукольце S является конгруэнцией на S тогда и только тогда, когда $\sigma = \rho|_{L(S)}$ и $\tau = \rho|_{U(S)}$ – конгруэнции на $L(S)$ и $U(S)$ соответственно, образующие согласованную пару (σ, τ) , и $(eu)\rho(fv) \Leftrightarrow e\sigma f$ и $u(\tau \circ \varphi(e))v$.*

ТЕОРЕМА 3. *Отображение $\alpha: \rho \mapsto (\rho|_{L(S)}, \rho|_{U(S)})$ является изоморфизмом решетки всех конгруэнций $\text{Con } S$ агр-полукольца S на подрешетку всех согласованных пар конгруэнций на $L(S)$ и $U(S)$ решетки $\text{Con } L(S) \times \text{Con } U(S)$, более того, $\text{Con } S$ является подпрямым произведением решеток $\text{Con } L(S)$ и $\text{Con } U(S)$ и $\alpha(0) = (0, 0)$, $\alpha(1) = (1, 1)$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Решетка конгруэнций $\text{Con } S$ произвольного агр-полукольца S модулярна. Решетка конгруэнций $\text{Con } S$ агр-полукольца S дистрибутивна тогда и только тогда, когда решетка конгруэнций $\text{Con } U(S)$ полутела $U(S)$ дистрибутивна.*

Предполагается, что гомоморфизмы полуколец сохраняют 0 и 1.

ТЕОРЕМА 4. *Отображение $\alpha: S \rightarrow T$ является гомоморфизмом агр-полукольца S в агр-полукольцо T тогда и только тогда, когда $\beta = \alpha|_{L(S)}$ – решеточный гомоморфизм $L(S)$ в $L(T)$, сохраняющий 0 и 1, $\gamma = \alpha|_{U(S)}$ – гомоморфизм полутела $U(S)$ в полутело $U(T)$ и для любых $e \in L(S)$, $u, v \in U(S)$*

$$u\varphi_S(e)v \Rightarrow \gamma(u)\varphi_T(\beta(e))\gamma(v) \quad \text{и} \quad u\psi_S(e)v \Rightarrow \gamma(u)\psi_T(\beta(e))\gamma(v),$$

причем $\alpha(eu) = \beta(e)\gamma(u)$.

Список литературы

[1] Е. М. Вечтомов, А. В. Михалев, В. В. Чермных, *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, **20** (1997), 282–309.

Е. М. Вечтомов (Е. М. Vechtomov)
Вятский государственный гуманитарный университет,
г. Киров
E-mail: vecht@mail.ru

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
27.10.2006

О. В. Старостина (О. V. Starostina)
Вятский государственный гуманитарный университет,
г. Киров