Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Медведев, Асимптотическое поведение решений уравнений с последствием в гильбертовом пространстве, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 1, 205–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5585>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:34:42

Асимптотическое поведение решений уравнений с последствием в гильбертовом пространстве

Д. А. Медведев

В предлагаемой статье приводятся результаты об асимптотическом поведении и наилучшаемых оценках решений неоднородных дифференциально-разностных уравнений, коэффициентами которых являются неограниченные операторы в гильбертовом пространстве.

Обозначим через $L_2(a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, пространство вектор-функций со значениями в гильбертовом пространстве H с нормой $\|\varphi\|_{L_2(a,b)}^2 = \int_a^b \|\varphi(t)\|_H^2 dt$, и через $W_2^1(a, b; A)$ – пространство Соболева вектор-функций со значениями в H (подробнее см. [1; гл. 1]) с нормой $\|\varphi\|_{W_2^1(a,b;A)}^2 = \|A\varphi\|_{L_2(a,b)}^2 + \|\varphi'\|_{L_2(a,b)}^2$.

Рассмотрим традиционную начальную задачу для дифференциально-разностного уравнения вида

$$u'(t) + Au(t) + \sum_{k=1}^n B_k Au(t - h_k) + \int_0^h B(s) Au(t - s) ds = f(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(s) = g(s), \quad s \in [-h, 0]. \quad (2)$$

Здесь A – положительный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H и имеющий компактный обратный. Операторы B_k , $B(s)$ имеют вид $B_k = T_k A^{-\theta_k}$, $B(s) = T(s) A^{-\theta_0}$, где T_k – ограниченные операторы, $T(s)$ – ограниченная сильно непрерывная оператор-функция. Постоянные θ_k и h_k таковы, что $0 < \theta_k \leq 1$, $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_n = h$.

Обозначим через $L(\lambda)$ характеристическую оператор-функцию уравнения (1):

$$L(\lambda) = \lambda I + A + \sum_{k=1}^n e^{-\lambda h_k} B_k A + \int_0^h e^{-\lambda s} B(s) A ds,$$

где I – тождественный оператор в H . Из леммы М. В. Келдыша [2] следует, что $L^{-1}(\lambda)$ – конечномероморфная оператор-функция с дискретным спектром. Обозначим через λ_q собственные значения $L(\lambda)$, упорядоченные в порядке возрастания модулей с учетом кратности ν_q , через Λ – множество всех собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$.

Из работы [3], в которой изучается поведение в комплексной плоскости характеристической оператор-функции $L(\lambda)$ уравнения (1) и устанавливаются оценки $L^{-1}(\lambda)$, следует, что конечны величины $\kappa_+ = \sup_{\lambda_q \in \Lambda} \operatorname{Re} \lambda_q$, $\nu_+ = \max_{\lambda_q \in \Lambda, \operatorname{Re} \lambda_q = \kappa_+} \nu_q$.

Собственные векторы, входящие в каноническую систему [2] собственных и присоединенных векторов оператор-функции $L(\lambda)$, отвечающие числу λ_q , обозначим через $x_{q,j,0}$ ($j = 1, 2, \dots, r_q$), их присоединенные порядка s – через $x_{q,j,s}$ ($s = 1, 2, \dots, p_{qj}$). Введем систему экспоненциальных решений однородного уравнения (1):

$$y_{q,j,s}(t) = e^{\lambda_q t} \left(\frac{t^s}{s!} x_{q,j,0} + \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} x_{q,j,1} + \dots + x_{q,j,s} \right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию u , принадлежащую пространству $W_2^1(-h, T; A)$ для любого $T > 0$, назовем *сильным решением* задачи (1), (2), если u удовлетворяет почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ уравнению (1) и условию (2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $g \in W_2^1(-h, 0; A)$, $f \equiv 0$ и $\beta < \kappa_+$ таково, что прямая $\operatorname{Re} \lambda = \beta$ не содержит собственных значений функции $L(\lambda)$. Тогда для сильного решения и задачи (1), (2) справедливо разложение

$$u(t) = \sum_{\lambda_q \in \Lambda, \operatorname{Re} \lambda_q > \beta} c_{q,j,s} y_{q,j,s}(t) + u_\beta(t), \quad t > 0, \quad u_\beta \in W_{2,\beta}^1(0, +\infty; A). \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $g \in W_2^1(-h, 0; A)$ и $f \in L_2(0, T)$ для любых $T > 0$. Тогда сильное решение и задачи (1), (2) допускает оценку

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^1(t-h, t; A)} &\leq d_1(t+1)^{\nu_+-1} e^{\kappa_+ t} \|g\|_{W_2^1(-h, 0; A)} \\ &+ d_2 \sqrt{t} \left(\int_0^t (t-s+1)^{2(\nu_+-1)} e^{2\kappa_+(t-s)} \|f(s)\|_H^2 ds \right)^{1/2}, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где постоянные d_1 и d_2 не зависят от функций g и f .

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу локализации спектра $L(\lambda)$ первое слагаемое в правой части разложения (3) содержит лишь конечное число слагаемых. Оценка (4) неулущаема в том смысле, что величину κ_+ нельзя заменить на $\kappa_+ - \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$.

Приведенные результаты справедливы и для конечномерных гильбертовых пространств. Более того, в случае $H = \mathbb{C}^r$ результаты теорем 1 и 2 справедливы и для уравнения более общего вида:

$$u'(t) = \int_{-h}^0 d\mu_M(s) u(t+s) + f(t), \quad t > 0, \quad (5)$$

где μ_M – матрица-функция ограниченной вариации, заданная на отрезке $[-h, 0]$. При этом величины κ_+ и ν_+ определяются точно так же для характеристической матрицы-функции $L(\lambda)$ уравнения (5).

Отметим, что предлагаемый подход в понимании решений и их асимптотического поведения, разумеется, не является единственно возможным. В настоящее время имеется обширная библиография (в основном относящаяся к случаю конечномерного H), в которой представлены различные интерпретации решений и методы изучения начально-краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений. Ограничимся указанием статей [4]–[6], относящихся к случаю уравнений в банаховых и, в частности, гильбертовых пространствах.

Автор глубоко признателен В. В. Власову и А. Г. Костюченко за полезные обсуждения работы и ценные предложения и замечания.

Список литературы

- [1] Ж. Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971. [2] М. В. Келдыш, *УМН*, **26:4** (1971), 15–41. [3] В. В. Власов, *Матем. сб.*, **186:8** (1995), 67–92. [4] G. Di Blasio, K. Kunisch, E. Sinestrari, *J. Math. Anal. Appl.*, **102:1** (1984), 38–57. [5] F. Kappel, K. Kunisch, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **304:1** (1987), 1–51. [6] K. Kunisch, M. Mastinšek, *Differential Integral Equations*, **3:4** (1990), 733–756.

Д. А. Медведев (D. A. Medvedev)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: plp@mail.ru

Представлено А. Г. Костюченко
Принято редколлегией
02.11.2006